

Ramon Llull y la geometría: de la cuadratura del círculo a la *Figura medii trianguli* pasando por la *Figura plena*

Pere Joan Planas Mulet

Ingeniero de telecomunicaciones, Mallorca

pjplanas@coit.es

doi: 10.3306/STUDIALULLIANA.115.83

Rebut el 15 març de 2020. Acceptat el 13 de juliol de 2020

Ramon Llull and Geometry: from squaring the circle to *Figura medii trianguli* through *Figura plena*

Resumen

Este artículo intenta explicar el tratamiento que Ramon Llull dio a la ciencia geométrica y su integración en su Arte. Se enmarcan sus conocimientos a partir del planteamiento cosmológico de Platón y las posibles influencias de matemáticos y filósofos de la antigüedad y medievales. En forma de hipótesis se plantea la analogía de la *Figura plena* con la Trinidad y, a través de la semejanza de figuras geométricas, se obtiene una firme cuantificación, números 16 y 9, de los principios del Arte luliano. En definitiva, se pretende rescatar el profundo trabajo de Llull en la ciencia geométrica y las razones que esgrime para integrarla en su Arte, y por consiguiente relacionar racionalmente el Creador con la creación, con una justificación sostenida por modelos geométricos, a partir de la percepción sensorial, la ayuda de la imaginación y la elevación del intelecto que el rigor geométrico posibilita.

Palabras clave

Ramon Llull, geometría, cuadratura del círculo, *Figura medii trianguli*, *Figura plena*

Studia lulliana 60 (2020), 83-134

<http://www.msl.cat/revista/revista%20portada.htm>

<http://studialulliana.uib.cat>

ISSN 2340 – 4752

Abstract

This article attempts to explain the treatment that Ramon Llull gave to geometric science and its integration into his Art. His knowledge takes its point of departure from Plato's cosmological approach and the possible influences of ancient and medieval mathematicians and philosophers. As a hypothesis, the author proposes an analogy of the *Figura plena* with the Trinity, and, through the similarity of geometric figures obtains a clear quantification —the numbers 16 and 9— of the principles of the Lullian Art. In short, the aim is to recapture the significance of Llull's geometrical studies and the reasons he gives for integrating them into the Art, and therefore rationally relating the Creator to his creation by geometric models, all based on sensory perception, with the help of the imagination and with the elevation of the intellect that geometric rigor makes possible.

Key Words

Ramon Llull, geometry, squaring the circle, *Figura medii trianguli*, *Figura plena*

Tabla

1. Preámbulo
 2. La geometría en la obra de Llull: introducción general
 3. La cosmología geométrica en Llull: influencia de Platón
 4. Los principios geométricos de Ramon Llull: contexto de la geometría de Euclides
 5. Conocimientos geométricos en época de Llull
 6. El método de la cuadratura del círculo
 7. La *Figura plena*
 8. La *Figura medii trianguli*
 9. Conclusiones
- Anexo: figuras

1. Preámbulo

Los estudios acerca de la ciencia geométrica de Ramon Llull son escasos y en contadas ocasiones penetran en la complejidad, la profundidad y la novedad del uso que hizo Llull de esta disciplina. La edición de la *Geometria nova* que publicó J. M.^a Millás en 1953¹ ofrece un buen punto de partida para replantear una investigación del texto acorde con lo que sabemos hoy del Arte luliano; sin embargo, el juicio negativo que expresó el editor, desde la perspectiva excluyente de la historia de la ciencia en su vertiente más estrictamente matemática, ha generado un cierto desinterés y, sin querer, ha contribuido a la desinformación. Se impone devolver a la geometría luliana la dignidad y el valor que le corresponden, ya que no es correcto considerar que tiene solo carácter empírico, que es carente de rigor matemático, que es oscura y desordenada en los planteamientos, y que ostenta tintes metafísicos en sentido negativo.

Este estudio pretende, pues, facilitar una visión general de la geometría en la obra de Ramon Llull que permita entender las razones que le impulsaban, con la intención de comprender mejor su trabajo y enjuiciarlo de acuerdo con la magnitud del esfuerzo que dedicó a determinadas nociones de esta disciplina. Tras rastrear las raíces platónicas y el marco euclidiano de la geometría luliana, se analizan las tres aportaciones lulianas sobresalientes que se anuncian en el título.

2. La geometría en la obra de Llull: introducción general

La geometría fue una ciencia que Ramon Llull expuso, de forma explícita e implícita, a lo largo de toda su obra. Sin embargo, fue en su estancia en París de los años 1297-1299 cuando dedicó más atención a esta ciencia con la finalidad de incorporarla a los principios de su Arte.

Llull define la geometría como la ciencia de la medida, es por tanto un arte inventada para medir líneas, ángulos y figuras. Una ciencia para medir la creación y también, de forma analógica, para comprender y amar al Cre-

¹ José M^a Millás Vallicrosa, *El libro de la «Nova geometria» de Ramon Llull* (Barcelona: Asociación para la Historia de la Ciencia Española, 1953). A pesar de algunos juicios negativos, en ocasiones considera el autor que los cálculos implícitos de Llull no carecen significativamente de exactitud. En general el tono crítico es respetuoso y es de agradecer la transcripción en latín de la obra, aunque no lo hiciese completamente. A la espera de la publicación de la edición crítica del *Liber de geometria noua et compendiosa* se puede consultar el artículo de Carla Compagno, «Il Liber de geometria noua et compendiosa di Raimondo Lullo», *Revista de Estudios de Ciencias Sociales y Humanidades* 31 (2014), pp. 35-45.

ador. En el capítulo 74 de la *Doctrina pueril* (1274-1276)² se hace mención a las ramas del saber del *quadrivium*, y en concreto a la geometría. Sucintamente Llull detalla un ejemplo de medida práctica geométrica, en concreto la medida de la altura de una torre con la ayuda del *cadrangle* (cuadrante). Así mismo aconseja a su hijo que no aprenda ni geometría ni aritmética ya que son ciencias complejas que requieren una alta dedicación. Dicha afirmación se debe entender como un reconocimiento a la dificultad y singularidad de esta ciencia que posteriormente fue integrada en su Arte. Así mismo esta complejidad toma en Llull la dualidad de las intenciones. Su primera intención es conocer a Dios, y las matemáticas pueden ser un medio para alcanzar ese principal objetivo, pero sin tomar la ciencia matemática en sentido finalista ya que sería entonces segunda intención y no aportaría ningún valor.

En el libro *Lo sisèn seny, lo qual apelam affatus* (1294) Llull no trata la geometría explícitamente; sin embargo, de forma implícita ya deja entrever como el funcionamiento de los sentidos de la vista y el oído se lleva a cabo por mecanismos de «sircularitat, quadrangularitat e triangularitat»,³ siendo ello su forma de relacionar los sentidos con la propia composición de las sustancias, formadas estas en base a los cuatro elementos y a las relaciones geométricas de interacción entre ellos. Han pasado veinte años entre el libro de la *Doctrina pueril* y el libro de *Affatus*, las ideas de Llull han evolucionado, ha pasado de desaconsejar el estudio de la geometría debido a su complejidad a interpretar el funcionamiento de los sentidos y del mundo sensual por medio de las figuras básicas de círculo, triángulo y cuadrado.

En el *Arbre de ciència* (1295-1296)⁴ Llull presenta un libro general para todas las ciencias, para que puedan entenderse mejor y evitar conocimientos confusos. Se articula tan ambicioso plan en torno a las figuraciones de dieciséis árboles con los cuales tratar todas las ciencias. A pesar de no existir un árbol dedicado a la geometría, toda esta obra se halla plagada de alegorías,

² *Doctrina pueril*, ed. Jaume Medina, ROL XXXIII, pp. 9-561; NEORL VII, ed. Joan Santanach, [LXXIV] «De geometria, arismetica, musica, estronomia». <<https://www.narpan.net/ben/indexdp.htm>> (5 de abril de 2020).

³ *Lo sisèn seny, lo qual apelam affatus*, ed. Coralba Colomba y Viola Tenge-Wolf, ROL XXXV, pp. 125-150; versión catalana, ed. Josep M. Vidal i Roca, «El Llibre de l'*Affatus* de Ramon Llull», *Affar* 2 (1982), pp. 13-31. La nota se halla en las pp. 22-24.

⁴ *Arbre de ciència*, ORL XI-XIII. En este trabajo se ha utilizado la versión traducida al castellano de Alonso de Zepeda, *Árbol de la Ciencia de el Iluminado Maestro Raymundo Lulio* (Bruselas: Francisco Foppens, 1664). <<https://bvpb.mcu.es>> (24 de marzo de 2017).

analogías y referencias geométricas, en concreto a las tres figuras básicas de círculo, triángulo y cuadrado.

En el Árbol humano habla de los «hábitos mecánicos y liberales, en el más breve modo que podemos». Nos dice que el geómetra considera las cantidades continuas y su medición. Así, los constructores cuantifican las torres y los marineros determinan el rumbo de navegación con líneas y ángulos, tal como cuenta en el posterior Árbol cuestiona. Todo ello relacionando las medidas superiores como principios de las cantidades artificiales abstractas de la materia. En el Árbol divina, Llull detalla que Dios no es sensible al no ser de cosas corpóreas ni tener figura circular, ni cuadrangular ni triangular, ni existir situación de largo, ni ancho, ni profundo, entendiendo por tanto que Dios no ocupa un espacio geométrico. Sin embargo, según se toma la situación, el espacio geométrico en la creación y en las criaturas significa en el humano entendimiento las personas divinas. Hay que entender, por tanto, que la comprensión geométrica de la creación también marca una vía para entender necesariamente al Creador, siendo esto el primer objetivo del Arte.

Es en el segundo viaje a París (1297-1299) cuando Llull aborda la geometría en su mayor extensión. La primera obra fue la titulada *De quadratura et triangulatura circuli sive De principiis theologiae* (1299),⁵ *De quadratura* en adelante. Esta obra se divide en dos partes. La primera parte trata, principalmente, sobre la demostración de la cuadratura del círculo: Llull expone un método original y sin precedentes para la cuadratura.

La segunda, la de los principios de teología, aprovecha la semejanza del proceso que ha utilizado para la cuadratura para comprender los principios teológicos: la esencia divina y sus dignidades, la Trinidad, la encarnación, los siete sacramentos, la jerarquía eclesiástica, la jerarquía celeste, Jesucristo Dios y hombre. Esta semejanza se basa en un razonamiento organizado en catorce círculos, partiendo de un «círculo blanco». El «círculo blanco» es presentado como un círculo general que contiene todas las figuras poligonales, de manera que la medida general de un círculo puede representar múltiples medidas concretas y particulares; todo ello en un proceso mental que pasa de la sensualidad a la comprensión racional mediante la imaginación. Llull establece, por tanto, un mecanismo geométrico que, a partir de las medidas

⁵ Las dos partes en las cuales está dividida la obra se han publicado separadamente en sendas traducciones francesas que hemos seguido en este artículo: 1. Armand Llinarès, «Version française de la première partie de la *Quadrature et triangulation du cercle*», *SL* 30 (1990), pp. 121-138, que abreviaremos «*quadrature*»; 2. La segunda parte, la de «teología», en René Prévost y Armand Llinarès, *Principes et questions de Théologie* (París: Éditions du CERF, 1989).

particulares y concretas de la creación, pueda imaginar y comprender analógicamente las medidas más elevadas, las teológicas, tal como apuntaba en el *Arbre de ciència*.

Liber de geometria nova et compendiosa (1299),⁶ *Geometria nova* en adelante, fue la siguiente obra de carácter geométrico escrita durante su segunda estancia parisina. Consta de dos libros. El primero vuelve sobre la cuadratura del círculo con nuevas razones ajustadas a su Arte. También presenta múltiples figuras que le sirven para explicar, por ejemplo, la formación de la materia a partir de los cuatro elementos, la disposición de los planetas, el funcionamiento de un cuadrante horario o las proporciones de las construcciones arquitectónicas. El segundo libro, que tiene tres apartados, trata de la utilidad de la ciencia geométrica como herramienta para fortalecer la imaginación y poder llegar a conocer y amar los objetos espirituales, como Dios, los ángeles y los principios generales. En el segundo apartado del libro segundo Llull detalla sus principios geométricos, siguiendo un cierto paralelismo con los *Elementos* de Euclides y ajustándolos a su Arte. Finalmente, en el tercero, a modo de repaso, plantea cuestiones que se resuelven con el clásico método de objeción y solución. La *Geometria nova* tiene por objeto investigar las ciencias relacionadas con la naturaleza, la creación natural, y también la creación artificial humana. Llull expone una concisa visión de interpretación del mundo a través de razones geométricas.

Como continuación de los dos libros anteriores Llull finaliza, estando en Mallorca, los *Començaments de filosofia* (1300).⁷ Su intención es clara: la filosofía es efecto de la primera causa, y es instrumento y espejo para tener conocimiento de la teología. Tal como había anticipado en el *De quadratura*, a partir de los círculos se obtendrá un mecanismo para conocer las ciencias particulares: la teología, la filosofía, el derecho, la medicina y otras ciencias. Los *Començaments de filosofia* presentan una exposición *more geometrico* de principios y cuestiones filosóficas y tan solo citan tres de los catorce círculos descritos en el *De quadratura*; su dimensión matemática está diluida y falta de la relevancia que la geometría adquiere en la segunda parte de esta obra, *De principiis theologiae*.

La idea de comprender, unificar y racionalizar el conjunto del saber sobre

⁶ En este artículo se han seguido dos ediciones: la primera, la versión en latín, transcrita por José M.^a Millás Vallicrosa (citado *supra*, n. 1); la segunda, en inglés, traducida por Yanis Damberg, *The New Geometry – Liber de geometria nova et compendiosa by Blessed Raymond Lull*, 2006. <<http://lullianarts.narpan.net/NewGeometry.pdf>> (23 de julio de 2019).

⁷ *Començaments de filosofia*, NEORL VI, ed. Fernando Domínguez Reboiras.

la base de principios geométricos no era nueva en tiempos de Llull; se puede remontar a Platón y tiene todavía vigencia hoy día. Llull redactó una *Ars iuris* (1304)⁸ que no tiene una estructura *more geometrico*, tal como había pretendido en las intenciones expuestas en el *De quadratura* con respecto a la aplicación del Arte al derecho;⁹ sin embargo, Leibniz, que conocía y admiraba a Llull, intentó buscar un paralelismo entre la ciencia del derecho, la geometría y la combinatoria para desarrollar la infinidad de los casos legislativos.¹⁰

El tratamiento geométrico aparece también en el *Ars generalis ultima* (1305-1308).¹¹ La geometría se detalla en una de las cien formas (la número 82), donde adicionalmente tienen entrada propia los conceptos de punto, línea, triángulo, cuadrángulo, círculo y figura. Llull recuerda que la ciencia geométrica se somete a la regla F del Arte, es decir, a la cantidad. A pesar de la vinculación de la mezcla de reglas y principios, las demostraciones de los ejemplos proporcionados siguen haciendo uso del tradicional método de trabajo de la geometría: imaginar y verificar por los sentidos. Así, el ejemplo de la cuadratura del círculo se justifica también con razones semejantes a los aportados en la *Geometria nova*. En otro caso enseña a visualizar ángulos que no se perciben, lo cual manifiesta claramente la importancia que en geometría se da a imaginar situaciones que no se perciben pero que permiten alcanzar la solución que posteriormente los sentidos podrán percibir.

3. La cosmología geométrica en Llull: influencia de Platón

Desde el tiempo de los antiguos griegos hasta bien entrada la Edad Moderna se suponía como verdadera la teoría de los cuatro elementos: tierra, agua, aire y fuego. Toda la creación natural y artificial estaba formada por estos elementos, llamados elementos simples, materia prima o principios.

El relato del *Timeo* de Platón es un mito de raíz pitagórica que intenta explicar la formación del mundo. Platón recoge la herencia presocrática y dota

⁸ *Ars iuris/Ars iuris naturalis*, ROL XX, ed. Jordi Gayà Estelrich; versión en español de Pedro Ramis Serra y Rafael Ramis Barceló (Madrid: Universidad Carlos III, 2011), consultable en <<http://hdl.handle.net/10016/12762>> (23 de julio de 2019).

⁹ Llinarès, «*quadrature*», p. 123.

¹⁰ Gottfried W. Leibniz, *Dissertatio de arte combinatoria*, en id., *Escritos matemáticos*, Mary Sol de Mora Charles (ed.), Obras filosóficas y científicas 7B (Granada: Editorial Comares, 2015), pp. 581-582, [40]: «Por eso, el arte de dar forma a los casos se basa en nuestra doctrina de las Complexiones [combinatoria]. En efecto, la Jurisprudencia, junto con otras cosas, es similar a la Geometría, ya que ambas tienen Elementos, y ambas, casos. [...] Ahora bien, los términos simples en Derecho, de los cuales surgen los demás al mezclarse, y que son casi Lugares comunes y géneros superiores, que establece cómo se recopilan Bernardo Laviñeta, monje de la Orden de los Menores, en el Com. Arte Magna de Llull, al cual sigue [...]».

¹¹ *Ars generalis ultima*, ROL XIV, ed. Alois Madre.

los cuatro elementos (tierra, agua, aire, y fuego) de una forma geométrica poliédrica.¹² Estos poliedros están constituidos por caras reducibles a dos tipos de triángulos: los triángulos más bellos, según Platón. Uno de ellos es la mitad de un cuadrado, es decir, el triángulo rectángulo isósceles; el otro es la mitad de un triángulo equilátero, es decir, un triángulo rectángulo escaleno (donde el cateto menor es la mitad de la hipotenusa).¹³ Se debe insistir en estos dos tipos de triángulos ya que Llull los utilizará habitualmente en su obra.

Ramon Llull, conocedor de esta visión platónica de la constitución del universo, integra la geometría como ciencia que explica matemáticamente la creación dentro de su Arte. Es importantísimo entender que la primera intención de Llull es conocer a Dios: toda su obra científica se arroga la comprensión de la fe y su demostración racional.¹⁴ Sin asumir este punto el opus luliano queda desdibujado.

Para Platón –y también para Aristóteles– el universo no tuvo un inicio. Llull, como cristiano, se distancia necesariamente de los filósofos de la antigüedad ya que posee un saber científico que ellos ignoraban: el Dios creador es la causa primera. Llull afirmaba, pues, que Dios creó la primera materia de la nada dando lugar a los cuerpos.¹⁵

Por ello, Llull se desmarca de la visión de Platón. Si para este los elementos simples son reducibles a triángulos, para Llull los elementos simples (tierra, agua, aire y fuego) no son visibles, ni perceptibles por ningún sentido, ya que no tienen forma propia, y solo podrán ser conocidos por vías intelectuales. Los elementos simples están sometidos a continua interacción entre

¹² Estos poliedros son: el cubo relacionado con la tierra (6 caras cuadradas, es decir, formado por 12 triángulos rectángulos isósceles); el icosaedro, con el agua (20 triángulos equiláteros, es decir, formado por 40 triángulos rectángulos escalenos); el octaedro, con el aire (8 triángulos equiláteros, es decir, formado por 16 triángulos rectángulos escalenos); el tetraedro, con el fuego (4 triángulos equiláteros, es decir, formado por 8 triángulos rectángulos escalenos). Estos cuatro poliedros son los llamados cuerpos de Platón que, juntamente con el dodecaedro, formado por 12 pentágonos, son los únicos sólidos construibles con polígonos regulares. El dodecaedro, que no se construye con los triángulos «más bellos» de Platón, y que por lo tanto tiene una esencia diferente a los cuatro elementos que forman la creación sublunar, se asoció a la creación del mundo supralunar, lo que se llamó la quinta esencia. Los dos triángulos «más bellos» de Platón dan lugar a dos herramientas básicas del dibujo geométrico: la escuadra (isósceles rectángulo) y el cartabón (triángulo rectángulo escaleno, que es la mitad de un equilátero).

¹³ *Timeo o de la naturaleza*, en Platón, *Obras completas*, ed. Francisco P. Samaranch (Buenos Aires: Aguilar, 1963), pp. 1150-1152 (53a, 54b, 55d, 57b).

¹⁴ Fernando Domínguez Reboiras, *Ramon Llull. El mejor libro del mundo* (Barcelona: Arpa, 2015), p. 210.

¹⁵ *Llibre de contemplació en Déu* (1273-1274), ed. Antoni Alomar et al., NEORL XIV, p. 141: «Bene-set s'iatz vos qui creás la primera materia de non re, la qual primera materia es materia d'on son feites totes les causes avent corces».

ellos; mezclándose entre sí dan lugar a los elementos compuestos.¹⁶ En esta acción toman forma, forma geométrica, los elementos compuestos, los *elementats* ('elementados', como Llull los denomina), en el mundo sublunar, es decir, los animales, las plantas, los minerales. Toda la naturaleza de la Tierra como planeta creado y tangible es el resultado de la interacción de los elementos simples. Además, de esta interacción surge la forma. Así se crea el cuerpo sustancial, como unión esencial de materia y forma.¹⁷

Y además por cuanto los elementos son cuatro y no menos ni más, están dispuestos a ser figurados en los elementados [elementos compuestos] en la figura cuadrangular, circular, y triangular.¹⁸

Llull considera que las formas de los cuerpos son reducibles a tres formas geométricas básicas: cuadrado, círculo y triángulo. Una muestra más de su pensamiento ternario. Para Platón los elementos simples (tierra, agua, aire, fuego) eran reducibles a triángulos; sin embargo, Llull los pone en relación con la definición de punto, puesto que el punto es la expresión geométrica mínima. En Llull, además, se detecta una relación de cada punto con los principios generales.¹⁹ En el próximo capítulo se volverá a incidir en el concepto de punto geométrico comparando la definición que da Llull con la de Euclides.

El trasfondo geométrico en la interpretación del cosmos siguió vigente en la Edad Moderna cuando matemáticos como Kepler o Galileo afirmaron que

¹⁶ Esta idea de la interacción de los elementos existía desde Empédocles: según este filósofo los elementos existían desde siempre y se mezclaban y se descomponían entre ellos a partir de procesos de afinidad y rechazo. Llull sigue esta tradición científica, tal como se puede ver en Sebastián Garcías Palou, *La formación científica de Ramon Llull* (Inca: Consell de Mallorca, 1989), pp. 33-36. El *Llibre de contemplació en Déu* profesa la doctrina astronómica de Ptolomeo, dada a conocer en el mundo medieval europeo en el libro de astronomía llamado *Almagesto*, donde se detalla el geocentrismo del universo. También Llull se basa en las teorías físicas sobre los cuatro elementos de Empédocles. Las ideas de Llull tienen gran parecido con el libro de las *Confesiones* de San Agustín, donde sostiene el hilemorfismo universal y que los ángeles están formados de una materia espiritual diferente de la sustancia corpórea.

¹⁷ En el *Arbre de ciència*, ORL XI-XIII (citado *supra*, n. 4), se detalla esta acción. Los cuatro elementos simples tienen relaciones de diferencia-concordancia-contrariedad. El cuadrado representa los cuatro elementos y las líneas formadas son de concordancia. La figura circular representa la entrada de unos elementos en los otros. La figura triangular representa la unión de los elementos con dos líneas de concordancia y una de contrariedad. Robert Pring-Mill, *El microcosmos lul·lià* (Palma: Moll, 2006), sintetiza estas acciones de los cuatro elementos en la fig. 4 de la p. 59. Se reproduce esta como fig. 9 del anexo.

¹⁸ *Arbre de ciència*, ORL XI, p. 27, y Zepeda, *Árbol de la Ciencia*, pp. 11-12.

¹⁹ Jordi Gayà, «La concepción luliana de "punctum" en su contexto medieval», *SL* 19 (1975), p. 42: «Cada principio absoluto (dignidad) es un punto. La referencia de un punto a otro, en una sola dirección, origina la línea. Una doble referencia causa la superficie [...]. Las tres dimensiones definen el cuerpo. [...] Esta exposición, además, muestra la estructura correlativa como fundamento del proceso cosmológico.» Gayà concluye, pp. 48-49: «La opinión afirmada constantemente por Llull es que los elementos se constituyen a partir de principios generales.»

el mundo es comprensible matemáticamente. El universo es racional, sigue un patrón armónico que es comprensible geoméricamente. La interpretación geométrica luliana del universo se encuentra a medio camino entre la capacidad imaginativa del intelecto y la capacidad sensorial. Por una parte, Llull confía absolutamente en la prueba sensible, pero también es consciente del poder de abstracción de las matemáticas que ayudan a la imaginación a comprender lo inobservable por los sentidos:

Es evidente para el sabio que la ciencia [geométrica] comienza en los poderes sensibles e imaginativos donde el intelecto humano recibe especies que son semejanzas de objetos corporales sensitivos, y luego hace que estas especies sean inteligibles en su esencia, y por estas razones de inteligibilidad, el intelecto alcanza los secretos naturales de las sustancias corporales [...].

Este tipo de imaginación eleva la imaginación y ayuda al intelecto y la memoria a alcanzar mejor los objetos imaginables que no se pueden imaginar en la realidad.²⁰

La interpretación que ofrece Llull de la tradición científica vigente en su tiempo, ampliada y adaptada a su Arte, es una tarea compleja que se fundamenta en tres nociones. Primera: la tradición platónica, que geometriza la creación a partir de un modelo ideal basado en triángulos. Segunda: la teoría de los cuatro elementos de Empédocles y Demócrito, complementada con el concepto de punto matemático o punto ideal no divisible, pero dotado de una esencia compatible con la noción ternaria y trinitaria de la esencia de Dios. Tercera: las relaciones de concordancia y contrariedad de los elementos simples interpretadas a partir de figuras cuadrangulares, triangulares y circulares. Se establece, pues, una relación por semejanza entre el trinitarismo esencial inherente a los principios del Arte y la creación vista desde una base geométrica que también es ternaria.

4. Los principios geométricos de Ramon Llull: contexto de la geometría de Euclides

Ramon Llull, habitualmente, no citaba sus fuentes. En el caso de la geometría tampoco nos dice dónde aprendió esta ciencia, ni qué antecedentes utilizó. Se podría especular sobre el conocimiento que tenía de la geometría teórica y aplicada, así como de los libros que circulaban en su tiempo. Tampoco podemos saber si las obras que pudo consultar y estudiar procedían de la tradición latina o islámica.

²⁰ Millás, *El libro de la «Nova geometria»* (citado *supra*, n. 1), pp. 84-85, y Dambergs, *The New Geometry* (citado *supra*, n. 6), pp. 51-52.

La ciencia geométrica sirve para medir el entorno, es decir, el conocimiento de las formas geométricas que adquiere la materia.²¹ Se debe entender que la geometría que Llull conocía era la de Euclides, sin descartar por ello una geometría práctica con aproximaciones numéricas, que también era presente en su época.²²

Los antiguos matemáticos griegos posiblemente fueron los primeros que sistematizaron las observaciones empíricas de los hechos geométricos y dieron el salto a una geometría teórica y axiomatizada. Este saber ha persistido hasta hoy día gracias a Euclides en su obra *Elementos*.²³

Euclides parte de 23 definiciones de conceptos (o proposiciones primeras) que a lo largo de su obra llegan a más de 200, 5 postulados (o principios), y 5 axiomas (o nociones comunes). A partir de ahí se deducen hasta 465 proposiciones (entre teoremas y problemas). En los *Elementos* se presentan unos objetos primitivos (punto, recta, plano...) a partir de unas nociones primeras asumidas como válidas (los axiomas, principios y definiciones).

Todo el sistema geométrico de los *Elementos* se basa en axiomas o principios primeros que posteriormente dan lugar a proposiciones verdaderas, en un proceso demostrativo por deducción, regulado por los principios. Este mecanismo de demostración deductiva se fundamenta en pequeños incrementos argumentativos, una simple verdad lleva a otra y estas dos a una tercera, y así de forma encadenada hasta llegar a la conclusión, que es una nueva proposición que formará parte del saber geométrico y que podrá servir para sucesivas demostraciones.

²¹ Marina Logares, *Las geometrías y otras revoluciones* (Madrid: CSIC, 2018), p. 9: «A esta geometría la llamamos geometría euclídea, y que estudia las formas que observamos a nuestro alrededor, las diferentes figuras geométricas que forman nuestro mundo.»

²² Marc Moyon, *La géométrie pratique en Europe en relation avec la tradition arabe, l'exemple du mesurage et du découpage : Contribution à l'étude des mathématiques médiévales*, tesis doctoral (Lille: Université Lille 1, 2008). En esta tesis doctoral hace distinción entre geometría elitista «savant» y práctica. Presenta, entre otras, la obra de Muhammad al-Baghdadi (m. 1141), obra perdida en árabe de la cual solo queda la versión latina titulada *De superficierum divisionibus liber*, que podría encuadrarse como geometría especulativa, frente a la obra de Abd ar-Rahman (903-986) en su libro *Liber aderameti*, donde se observa un cálculo geométrico más práctico de tipo algebraico.

²³ La vida de Euclides (~325 a. C. - ~265 a. C.) es desconocida; se sabe de él gracias a Proclo (412-485), que vivió unos setecientos años después, en el siglo quinto de nuestra era. Proclo escribió el libro *Elementos de teología* (consultado por la edición de José M. García Valverde, Madrid: Trotta, 2017), con gran influencia en la filosofía posterior, con una versión originalísima de la metafísica antigua, en forma de definiciones y deducciones a imitación de los *Elementos* de Euclides, procedimiento expositivo que más tarde adoptaría Spinoza en su *Ética*. La lectura de *Elementos de teología* de Proclo recuerda en muchos de sus pasajes la exposición que Llull utiliza en su obra, cuando habla de unicidad y multiplicidad (Proposición 1, p. 35) o de la generación divina basada en la infinitud de la potencia divina (Proposición 152, p. 117), que personalmente me recuerda al proceso de cuadratura que se explica en el apartado 6 de este artículo.

Llull, en la segunda parte de la *Geometria nova*, estructura la geometría con su estilo personal que recuerda al euclídeo en estructura y en algunos contenidos. Define 100 principios y 100 corolarios, y 100 cuestiones explicativas con su método de pregunta-objeción-solución. Los principios que Llull trata se refieren a 10 conceptos (objetos primitivos primeros o principios): el punto, la línea, el ángulo, la figura, la cantidad, el centro, la capacidad, la longitud, la anchura y la profundidad. Con la elección de estos principios ya se anticipa que para Llull la geometría no tiene una finalidad matemática, como es el caso de Euclides, sino que es una herramienta para investigar el universo a través de la deducción y de la demostración.

Llull, por tanto, no se dedicará a explicar teoría matemática: para ello ya existía la brillante obra de Euclides. Para él la geometría será el medio que permitirá explicar las razones de la naturaleza, entre ellas la del hombre. Esto explica por qué Llull se expresa de una forma que, a primera vista, se puede considerar poco rigurosa en términos matemáticos; sin embargo, Llull es un gran conocedor del mundo físico, y afirma cosas como:

Todo temperamento de aire consiste más de anchura que no de largo o profundo [principio 9 de la Anchura]. La gravedad busca un centro y la levedad busca otro [principio 6 del Centro]. Dado que una línea está hecha de puntos, es cuantitativamente divisible [principio 10 de la Cantidad]. Ninguna figura puede existir sin el círculo [principio 7 de la Figura]. Ninguna figura puede ser esbelta sin proporción en sus partes [principio 10 de la Figura]. Todas las líneas consisten de puntos largos [principio 5 de la Línea]. Sin puntos no puede haber movimiento [principio 10 del Punto]. Melancolía y profundidad concuerdan [principio 8 de la Profundidad].²⁴

La mezcla de matemáticas-física-metáfísica inherente a la obra luliana no es obstáculo para buscar puntos comunes entre los nuevos principios geométricos de Llull y los euclídeos, tal como se puede comprobar en los siguientes ejemplos comparando las definiciones de Euclides con las de Llull de la *Geometria nova*:²⁵

Punto (Euclides):	Punto es lo que no tiene partes. (D.I.1)
Punto (Llull):	Un punto indivisible no puede ser observado ni tener partes. [principio 6 del punto, pdp 6] Solo el punto matemático es simple. [pdp 8]

²⁴ Millàs, *El libro de la «Nova geometria»* (citado *supra*, n. 1), pp. 97, 93, 92, 90, 90, 87, 86, 98; y Dambergs, *The New Geometry* (citado *supra*, n. 6), pp. 70, 64, 62, 60, 60, 56, 53, 72.

²⁵ Millàs, *ibid.*, pp. 86, 93, 85, 87, 87, 93; y Dambergs, *ibid.*, pp. 53, 53, 53, 56, 56, 58. Las sentencias de Euclides se han adaptado de la versión en español de Pedro Miguel González Urbaneja, *Los Elementos de Euclides*, pp. 25-26. <<http://www.xtec.cat/sgfp/llicencies/200304/memories/elementseuclides1.pdf>> (16 de febrero de 2016).

Línea (Euclides):	Línea recta es la que yace por igual sobre sus puntos. (D.I.4) Los extremos de la línea son puntos. (D.I.3) Los extremos de la superficie son líneas. (D.I.6)
Línea (Llull):	Un punto es un ente que forma parte de la línea. [pdp, 1] Las líneas consisten materialmente de puntos. [principio 2 de líneas, pdl 2] Una línea es el contorno de una figura. [pdl 1]
Ángulo (Euclides):	Ángulo agudo es el menor que el recto. (D.I.12)
Ángulo (Llull):	Un ángulo recto tiene más capacidad que un agudo. [principio 2 del ángulo]

Llull concuerda con Euclides en la definición de punto matemático, aquel elemento más simple e indivisible, y que formalmente no puede ser observado, ya que es una idea abstracta. Sin embargo, para Llull, que siempre innova, el punto es algo más que la mera abstracción matemática; Llull aprovecha la definición de punto para dar el salto de la percepción sensorial a la metafísica.

Por ejemplo, un punto simple (indivisible y que no puede ser detectado por los sentidos) es una esencia de fuego o una de agua. Llull razona a partir de la teoría de los cuatro elementos, vigente científicamente en su tiempo, y enlazando con la teoría atomista. El punto corresponde a aquella parte de la sustancia que ya no se puede dividir más, cuando está llevada al límite, ya que una esencia de fuego ya no es sustancia física tal como la entendemos. Además, Llull afirma que cada principio es un punto redondo que es invisible, pero está lleno de sus correlativos esenciales (la estructura correlativa de *-tivo*, *-able*, *-ar*):²⁶

Y por cuanto cualquier punto es redondo, porque está lleno de sus concretos esenciales, como la bondad que está llena de su bonificativo, bonificable y bonificar se sigue lo profundo [...].²⁷

Llull enlaza el concepto de punto simple (invisible, sin partes e indivisible) con su teoría de los correlativos para explicar las razones de la creación y, a la vez, conecta con el dogma cristiano de un Dios trino y uno que es simple, ya que Dios no es sustancia y por tanto no puede tener composición pero sí puede ser conocido por comparación.²⁸

²⁶ Gayà, «La concepción luliana de “punctum”» (citado *supra*, n. 19).

²⁷ *Arbre de ciència*, ORL XI, 24 («Tronco del Àrbol elemental»), y Zepeda, *Árbol de la Ciencia*, p. 10.

²⁸ *Llibre del gentil e dels tres savis*, ed. Anthony Bonner, NEORL II, p. 97: «la trinitat de Déu e la sua unitat és signficada per la unitat e trinitat qui és en totes criatures». En el libro III, el de la exposición de la doctrina por parte del cristiano, son numerosos los pasajes del mismo estilo: «so per que Déu és mills demostrat per les criatures a home, cové esser veritat, per la qual veritat trinitat es demostrable» (p. 97). El razonamiento (tal como se desarrolla extensamente en las pp. 108-109) se puede resumir como sigue:

Los puntos físicos, captables por los sentidos a diferencia de los puntos simples, sí son divisibles y medibles. Los puntos tangibles, formados de la mezcla de puntos simples, son los puntos que forman los cuerpos y las sustancias que tienen tres dimensiones (ancho, largo y profundo); así, Llull nos dice que el punto, que es un vértice de un ángulo, es divisible, ya que un ángulo está formado por dos líneas, y por tanto el punto participa de cada línea, recreando una superficie que es una entidad compuesta. Este proceso de composición explica la formación de la naturaleza física a partir de los principios simples:

Todo punto que es sustancia de un ángulo es común y divisible.²⁹ [principio 5 del punto]

Se dijo que un punto sin partes no puede ser dividido. Por lo tanto, se deduce que tal punto no puede ser físico, y que debe ser un punto primero, y por tanto simple. Estos puntos constituyen las principales partes de la naturaleza, ya que la naturaleza construye sustancias físicas sensibles a partir de principios primeros usando puntos compuestos, tales como la bondad física substancial natural, y también como la grandeza, la duración, el poder, el instinto, el apetito y otros principios primordiales de los cuales derivan los principios compuestos comunes a las líneas, las superficies y la profundidad.³⁰

Analizado el primer elemento geométrico, el punto, que es el más simple y difícil de definir, se abordará el tratamiento de las líneas geométricas. Existe una cierta similitud entre las definiciones de línea de Euclides y de Llull, pero surgen diferencias conceptuales de tipo práctico: para Euclides una línea es pura longitud sin grosor, porque se atiene a la idea matemática de línea; para Llull, en cambio, la línea no puede existir sin plenitud, según se indica en el cuarto principio de las líneas.³¹ Su noción de línea se aproxima más, por tanto, a las líneas físicas y tangibles. El concepto de línea para Llull ya no es una idea abstracta y matemática simple, porque para él la línea está compuesta de puntos y está relacionada con los cuerpos:

Se dijo que las líneas consisten materialmente de puntos. Se sigue, por tanto, que todas las líneas son compuestas.³² [corolario 2 de los principios de las líneas]

Las superficies consisten materialmente de líneas contiguas.³³ [principio 3 de la línea]

el hombre es semejante a Dios en trinidad, puesto que está formado por alma, cuerpo y la conjunción de ambas, y ello le obliga a amar a Dios, ya que todo ser ama a su semejante.

²⁹ Millás, *El libro de la «Nova geometria»* (citado *supra*, n. 1), p. 86, y Dambergs, *The New Geometry* (citado *supra*, n. 6), p. 53.

³⁰ Millás, *ibid.*, p. 86, y Dambergs, *ibid.*, p. 54.

³¹ Millás, *ibid.*, p. 87, y Dambergs, *ibid.*, p. 56.

³² Millás, *ibid.*, p. 88, y Dambergs, *ibid.*, p. 56.

³³ Millás, *ibid.*, p. 87, y Dambergs, *ibid.*, p. 56.

La geometría euclidiana funciona de forma perfecta dentro del ámbito físico sensible, tal como determina sistemáticamente la experiencia. Llull no negó la geometría euclidiana, pero, como siempre, con su Arte dio un paso más allá. Quiso utilizar la geometría para explicar no solo por razones estrictamente matemáticas las relaciones entre figuras geométricas, sino además como herramienta que le sirvió para mostrar las «razones necesarias» dentro de otros ámbitos de la creación. Así como Platón pretendía incluso la geometrización de la moral,³⁴ Llull lo pretendía con todas las ciencias:

Por dicha razón [a partir de la cuadratura y triangulación del círculo] nosotros estudiaremos en la segunda parte de este libro los principios de teología, de filosofía, de derecho, de medicina, y de otras ciencias, cuyos principios ya han sido descubiertos por los especialistas.³⁵

Llull no va contra los conocimientos de las ciencias de autores precedentes,³⁶ su geometría es «nova» ya que quiere ampliar el conocimiento de esa ciencia y unificarla con otros conocimientos científicos para investigarlos con el método de su Arte. El enfoque geométrico en sus demostraciones ejerció una notable influencia en su obra durante su estancia parisina entre los años 1297 y 1299. Cayó en la cuenta de que, al tener la geometría validez universal, si con su Arte conseguía salvar las principales dificultades en esta ciencia, su método obtendría un gran éxito:³⁷

Para estudiar la cuadratura y triangulación del círculo utilizaremos el método del Arte General, ya que sus principios generales y sus reglas ayudan a descubrir los secretos de la naturaleza.³⁸

Llull entiende que todas las ciencias en su origen griego pagano presentan un escollo principal: no incorporar la trascendencia divina. Por ello el Arte,

³⁴ Pedro Miguel González Urbaneja, «Platón, Matemática en la Filosofía y Filosofía en la Matemática», en *Historia de las matemáticas/Biografía de matemáticos ilustres*, Real Sociedad Matemática Española <<http://www.divulgamat.net>> (9 de enero de 2019), p. 1: «Platón matematiza toda la realidad, pero no solo la realidad física, sino también la esfera espiritual –lo moral, lo estético, lo político, etc.–»; p. 5: «La geometría nos obliga a contemplar la esencia [...]. Es una ciencia del conocimiento del ser [...]. Conducirá el alma hacia la verdad y dispondrá la mente del filósofo para que eleve su mirada hacia arriba» (*República*, 526e-527b).

³⁵ Llinarès, «*quadrature*» (citado supra, n. 5), p. 123.

³⁶ Ni posiblemente tampoco dar lecciones en esas ciencias a los maestros parisinos, tal como apunta Fernando Domínguez Reboiras, «Geometría, filosofía, teología y Arte en torno a la obra *Principia philosophiae* de Ramon Llull», *SL* 35 (1995), p. 23.

³⁷ Fernando Domínguez Reboiras, *Ramon Llull. El mejor libro del mundo* (citado supra, n. 14), p. 71: «Los escritos lulianos irán mostrando cada vez más una intensa toma de conciencia de los temas que preocupaban a la intelectualidad cristiana representada por la Universidad de París, que se saldará con una creciente confrontación de su pensamiento con las nuevas corrientes filosóficas, alejadas o en clara oposición con los postulados del ideario luliano.»

³⁸ Llinarès, «*quadrature*» (citado supra, n. 5), p. 122.

sin negar la ciencia precedente, tendrá siempre en cuenta los atributos divinos como principios.³⁹ Será su sello científico para hacer frente al alejamiento que separaba la ciencia de la teología. Para Llull el conocimiento es un todo único en el que confluyen la filosofía y la teología, la razón y la fe.

5. Conocimientos geométricos en época de Llull

Llull entendía la geometría no solo como una herramienta matemática que tiene relación con el arte de la medida, de las aplicaciones prácticas, sino que él la extendió al conocimiento de las ideas abstractas, y así lo dice en multitud de obras:

El geómetra considera las cantidades continuas, y las mide desde el principio hasta el medio, y desde el medio hasta el fin, y hace el círculo [...]. Además, considera el cuadrado y el triángulo que perfeccionan el círculo. Y viene a estas figuras según toma las semejanzas de los hábitos naturales superiores; las cuales aplica a su arte para saber las cantidades de las torres; y los marineros para saber los espacios de lugar que hay entre un viento y otro.⁴⁰

La geometría es el Art inventada para medir líneas, ángulos y figuras [...] por tanto la cantidad es el sujeto de la geometría.⁴¹

Y aquí el intelecto ve como el geómetra construye la ciencia mediante el uso de las medidas imaginarias confirmadas por la experiencia sensorial.⁴²

¿Es la geometría un sujeto, signo o instrumento para que el teólogo mida la teología, el filósofo mida la naturaleza, y para que el moralista mida la moral?⁴³

Para Llull la ciencia geométrica tenía un alcance universal. A partir de su capacidad práctica de medir el mundo físico podía ayudar a elevar la imaginación para probar medidas más elevadas, no necesariamente sensibles. Esta practicidad en Llull se manifiesta cuando habla del uso del compás para medir líneas rectas y de las dificultades para medir curvas:

Dado que las medidas de las líneas rectas y de las curvas no son de la misma forma, ya que no se pueden medir las curvas con un compás como las rectas.⁴⁴

³⁹ Antoni Bordoy, «Ramon Llull i la universitat parisenca: una proposta de reforma dels “curricula” de les arts lliberals», *Revista d'Història de l'Educació* 28 (2016), p. 59-60.

⁴⁰ *Arbre de ciència*, ORL XI, p. 217 (Arbol humanal, «De la Geometria»); y Zepeda, *Árbol de la Ciencia*, p. 102.

⁴¹ *Ars generalis ultima*, ROL XIV, p. 358.

⁴² *Ibid.*, p. 360.

⁴³ *Ibid.*, p. 509.

⁴⁴ Llinarès, «*quadrature*» (citado *supra*, n. 5), p. 122.

Se miden los seis lados de un hexágono con el compás y se traza una línea recta de su longitud total, a la cual se añade una longitud extraída de seis arcos.⁴⁵

El arte de la medida geométrica era conocido en la época de Llull a partir de diversos tratados sobre esta disciplina. En el mundo latino, por ejemplo, cabría destacar: los *Elementos* de Euclides, con una traducción de Camparo de Novara (1120-1296); *Liber philotegni de triangulis*, de Jordano de Nemore (?-1237); *De arte mensurandi*, de Jean de Murs (1290-1351); *Practica geometriae*, de Leonardo de Pisa (1170-1240); la también llamada *Practica geometriae* de Hugo de San Víctor (1096-1141); *Liber embadorum*, de Platón de Tívoli (1110-1145), que es una traducción de la obra en hebreo de Abraham Bar Hiyya (?1070-1145) *Libro de las medidas y de la aritmética*, y posiblemente también *El libro de las divisiones de las figuras* de Euclides, que se encuentra actualmente perdido, que fue la base que utilizó Leonardo de Pisa en su libro.

Tampoco se puede olvidar la tradición islámica, especialmente en la geometría práctica aplicada a la medida y a la división de tierras de cultivo o en la ornamentación arquitectónica.⁴⁶ La *Figura medii trianguli* pasa por ser un caso singular, aunque para Llull tendrá una significación especial, muy recurrente en la literatura de la época, como, por ejemplo, en *El libro de las divisiones de las figuras* de Euclides. Este y otros casos prácticos se pueden ver en la restauración de la obra llevada a cabo por Raymond Clare Archibald. Archibald recoge un comentario de Proclo en el que se hace referencia a los tipos de divisiones de figuras geométricas con figuras semejantes y no semejantes, que podrían relacionarse con los apuntes que Llull hace habitualmente cuando habla de la división por multiplicación de figuras.⁴⁷ Por ejemplo, en el capítulo «*De figuris triangularum et quadrangulorum*» del libro de *Geometria nova*, Llull proporciona una doctrina para igualar superficies de figuras diferentes comparando con una figura semejante, y usa un argumento parecido en el capítulo «*De mensura triangularibus et quadrangularibus*».

⁴⁵ Ibid., p. 131.

⁴⁶ Marc Moyon, «Dividing a triangle in the Middle Ages: An exemple from Latin Works on Practical Geometry», en *Let History into the Mathematics Classroom* (Cham: Springer International Publishing, 2018). <https://www.researchgate.net/publication/320692241_Dividing_a_Triangle_in_the_Middle_Ages_An_Example_from_Latin_Works_on_Practical_Geometry/citation/download> (10 de abril de 2019). Así mismo, el autor expone como la división de figuras forma parte de una antigua tradición y es un tema recurrente en matemáticas.

⁴⁷ Raymond Clare Archibald, *Euclid's book on division of figures with restoration based on Woepcke's text and the Practica Geometriae of Leonardo Pisano* (Cambridge: at the University Press, 1915). Se recoge el siguiente comentario atribuido a Proclo (cap. I, n. 3): «For the circle is divisible into parts unlike in definition or notion, and so is each of the rectilinear figures; this is in fact the business of the writer of the *Elements* in his divisions, where he divides given figures, in one case into like figures, and in another into unlike».

La geometría, más allá del uso estricto matemático y de sus aplicaciones en la física y el conocimiento astronómico, también contaba con múltiples interrelaciones con la teología, como puede verse en Roger Bacon, que es un autor coetáneo de Llull. Platzeck, que atribuye estas relaciones a una influencia neoplatónica, cita un comentario de Proclo sobre el círculo del primer libro de Euclides: «El círculo es la primera, la más sencilla y la más perfecta de las figuras. [...] Al hacer distinción entre figuras terrestres y otras supra terrestres, el círculo es siempre de naturaleza más divina».⁴⁸ De hecho, en las definiciones del primer libro de los *Elementos* de Euclides se antepone la definición de círculo a la de otras figuras rectilíneas. Llull, en su libro *De quadratura*, define la primera figura como el «círculo blanco» y de este se derivan todas las figuras rectilíneas; es un esquema que podría tener una fuente neoplatónica vía Proclo, a través de la cual se remontaría al mismo planteamiento de Euclides.

Además, no conviene descartar en Llull el punto de vista místico. La geometría, regida por leyes inmutables, como obra divina reflejada en la belleza de la creación. Este planteamiento debía ser frecuente en el Medievo.⁴⁹

Charles Burnett recoge el comentario de un anónimo comentador latino de finales del siglo XII del libro de los *Elementos* de Euclides. Este anónimo autor considera dos tipos de medidas geométricas: las reales y las verbales o imaginarias. Las reales son los tamaños de altura y distancia utilizados por los agrimensores y los arquitectos, que se basan en instrumentos. Las verbales, intelectuales o imaginarias son, por ejemplo, del tipo «los debates de los filósofos donde dicen que Dios es inconmensurable».⁵⁰

Llegamos, por tanto, al concepto de Dios geómetra recogido en los frontispicios de las biblias moralizadas de moda en el siglo XIII.⁵¹ Aparece la figura de Dios ordenando el mundo con un compás, herramienta por excelencia del geómetra, dando forma y leyes armónicas y precisas para crear el cosmos a partir del caos primigenio de los elementos. Una imagen que se puede ver en la fig. 1 del anexo, proveniente del ms. 2554 Viena fol. 1v.⁵²

⁴⁸ Erhard-Wolfram Platzeck, «Descubrimiento y esencia del Arte del Beato Ramon Llull», *EL* 8 (1964), p. 147.

⁴⁹ Tamara Albertini, «La Quadrature du cercle d'Ibn al- Haytham – Solution philosophique ou mathématique?», *Journal for the History of Arabic Science*, vol. 9, núms. 1-2 (1991), pp. 5-21.

⁵⁰ Marc Moyon, *La géométrie de la mesure dans les traductions arabo-latines médiévales*, prefacio de Charles Burnett (Turnhout: Brepols, 2017), pp. 6-7.

⁵¹ Antonia Martínez Ruipérez, «Del cosmos al caos en las Biblias moralizadas», *Estudios Medievales Hispánicos*, 4 (2015), pp. 7-38.

⁵² Imagen tomada de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:God_the_Geometer.jpg> (4 de junio de 2019).

Estas dos vertientes de la geometría se pueden ver en Llull: la de las cuestiones prácticas de astronomía, arquitectura, navegación y fisiognomía —a las que Llull añade medicina y filosofía en el sentido amplio de ciencia natural— y la vertiente metafísica y teológica. En esta última Llull intentará dar un paso científico arriesgado, que confirma su obsesión por la unificación de las ciencias. La verdad es una sola, teológica y natural a la vez, por esto Llull acaba proponiendo medir lo incommensurable. La cuadratura del círculo, tarea imposible, será el gran objetivo de esta nueva ciencia geométrica de Llull.

6. El método de la cuadratura del círculo

La cuadratura del círculo consiste en construir un cuadrado de igual área que un círculo, pero solo con el uso de la regla y el compás. Lo de la regla y el compás debe recalcarse, ya que son las herramientas básicas de la geometría, herramientas de dibujo y por tanto ayudas de la imaginación.

Hoy día se sabe que la cuadratura del círculo es irresoluble utilizando solo la regla y el compás, pero desde la ciencia griega clásica hasta la actualidad ha captado la atención de todos los matemáticos relevantes.⁵³

Se podría decir, muy abreviadamente, que Llull desarrolló un método para encontrar la cuadratura del círculo, y también la triangulación, a partir de figuras poligonales regulares inscritas dentro del círculo. Un método aproximado y único para la cuadratura, ya que no se ha encontrado de momento ninguna comparación posible con otro matemático precedente.

Elena Pistolesi, en un relevante artículo, describe las necesidades geométricas de Llull dentro de su Arte y apunta a una evolución del método de cuadratura de Llull resumiéndolo en tres etapas: (1) en *De quadratura*, (2) en *Geometria nova*, y (3) en *Ars generalis ultima*.⁵⁴

⁵³ Analíticamente es conocido que la relación matemática para llevar a cabo la cuadratura implica el uso del número pi (anotado con la letra griega π desde comienzos del siglo XVIII), en concreto la raíz cuadrada de pi. Dado un círculo de radio R, entonces el lado del cuadrado de igual área vale $R\sqrt{\pi}$. Sin embargo, esta magnitud, raíz cuadrada de pi, es imposible trazarla con regla y compás debido a que el número π es trascendente, es decir, que no es una solución de una ecuación algebraica o de un polinomio con números enteros, tal como demostró Lindemann a finales del siglo XIX. A pesar de ello hay multitud de ingeniosas aproximaciones a la solución del problema realizadas con regla y compás.

⁵⁴ Elena Pistolesi, «Ramon Llull, la geometria i les quadratures del cercle», en M. I. Ripoll Perelló (ed.), *Actes de les Jornades Internacionals Lul·lianes. Ramon Llull al s. XXI. 1, 2 i 3 d'abril de 2004*, Col·lecció Blaquerna 5 (Palma — Barcelona: Universitat de les Illes Balears — Universitat de Barcelona, 2005), pp. 107-144. Documento consultable en línea: <https://www.academia.edu/13001365/_Ramon_Llull_la_geometria_i_les_quadratures_del_cercle_en_M._I._Ripoll_Perell%C3%B3_ed._Ramon_Llull_al_s._XXI_2005> (14 de septiembre de 2016).

Geométricamente hablando, Llull expuso dos métodos para la cuadratura del círculo, y de rebote para la triangulación.⁵⁵ Sin embargo, el segundo método es un resumen visual del primer método.

El método (1) lo publicó en *De quadratura et triangulatura circuli sive De principiis theologiae*,⁵⁶ del cual se conservan versiones en latín y catalán. Fue escrito en París en junio de 1299. El método (2) lo editó en el *Liber de geometria nova et compendiosa*,⁵⁷ redactado también en París en julio de 1299, del cual solo se conservan versiones en latín.

El método (1) parte de la construcción de figuras poligonales regulares inscritas dentro de un círculo, que denominó «círculo blanco». Se comienza con un triángulo, después con un cuadrado, luego con un pentágono, hexágono, heptágono, y finalmente con un octógono. Es un método aproximado sin otro precedente matemático conocido.⁵⁸ A partir de cada polígono inscrito se desarrolla el perímetro y, añadiendo un lado más (un lado imaginado, como dice Llull), se obtiene el perímetro del cuadrado que produce la cuadratura. Ya solo queda plegar estas líneas y darles forma de cuadrado. Partiendo de cada polígono se llega a un mismo cuadrado. Visualmente se puede imaginar que todos los cuadrados son iguales, tal como Llull cuenta. Dicho procedimiento se puede apreciar en la fig. 7 del anexo. El algoritmo expresado por Llull se muestra con notación matemática actual en Hofmann y en Pistolesi.⁵⁹

Haciendo el debido cálculo analítico se pueden comprobar tres cosas: la primera, que los cuadrados resultantes no son iguales, a pesar de que vi-

⁵⁵ Para la triangulación Llull da dos métodos. Un método describe, no de forma clara, que el triángulo equilátero de la triangulación, es decir, el que cumple con la misma área que el círculo, es aquel que es equidistante o intermedio entre el triángulo inscrito y el circunscrito al círculo. Este primer método es equivalente al resumen visual que Llull proporciona para el cuadrado (*Figura magistralis*). El segundo método se trata de una aproximación, que tampoco demuestra matemáticamente sino que la hace desde un razonamiento práctico; sin embargo, sorprende su precisión y sencillez de cálculo y ejecución. El perímetro del triángulo equilátero que triangula por área al círculo debe ser de cuatro diámetros. El objetivo de este artículo no es detallar el grado de precisión de los métodos lulianos, pero sí dejar constancia del hábil manejo implícito de las aproximaciones aritméticas inherentes a la geometría práctica y que seguramente no pasaron desapercibidas para Llull. Incluso una cierta fascinación metafísica de corte pitagórico al comprobar que el perímetro del círculo, del cuadrado y del triángulo con la misma área están en progresión aproximada de 6, 7 y 8 respectivamente, que Llull recuerda al decir que el cuadrado es intermedio al círculo y al triángulo.

⁵⁶ Ver nota 5.

⁵⁷ Ver nota 6.

⁵⁸ El método de Llull podría comprenderse como una simplificación del método de exhaustión aplicado por Arquímedes para acotar el número pi, aunque el trasfondo matemático en ambos métodos es completamente diferente. También podría tener relación con el desarrollo de figuras isoperimétricas.

⁵⁹ Joseph E. Hofmann, «*Die Quellen der Cusanischen Mathematik I: Ramon Lulls Kreisquadratur*», Cusanus-Studien VII (Heidelberg: Carl Winter's Universitätsbuchhandlung, 1942), pp. 3-38, y Pistolesi, «Ramon Llull, la geometria i les quadratures del cercle» (citado *supra*, n. 54), pp. 114-122.

sualmente lo parezcan; la segunda, que la mejor aproximación se consigue partiendo precisamente de un cuadrado inscrito, y la tercera, que a partir del octógono el método de Llull empieza a fallar, ya que la cuadratura por área está dando paso a la cuadratura por perímetro.⁶⁰ Llull extiende el método a polígonos inscritos de mayor número de lados pero se va perdiendo exactitud; ello posiblemente fue un error en la capacidad de dibujar (y que visualmente no se percibe) o una confusión entre cuadrar el área y el perímetro.

La mejor aproximación que Llull consiguió se traduce en un error equivalente del 0,5% del número pi, lo que equivale a decir que pi vale 3,125, o, expresado de forma racional, más común en esa época, como 3 y 1/8, ya que en tiempos de Llull la numeración decimal aún se estaba incorporando al mundo latino.⁶¹ Este valor aproximado de pi coincide con el que usaban los matemáticos de la antigua Babilonia, incluso los egipcios, a pesar de que utilizasen el número entero 3 como aproximación práctica. Casualmente —y tal vez no tan casualmente— el número 3 como valor aproximado de pi se obtiene precisamente a partir del triángulo equilátero inscrito.⁶²

El hecho de que la aproximación a pi se resuma en los números 3 (a partir del triángulo inscrito en un círculo) y una mejor aproximación con el 3,125 (a partir del cuadrado inscrito en un círculo), y que estos dos valores fueran los utilizados por los matemáticos babilónicos, egipcios, y posteriormente por los persas, da juego a abrir una hipótesis más de la procedencia de los conocimientos de Llull. No es objetivo de este artículo abordar este complicadísimo tema; valga, sin embargo, la sugerencia como prueba de los sólidos conocimientos matemáticos de Llull.

⁶⁰ Un hecho que resulta curioso es que un círculo y un cuadrado del mismo perímetro tienen áreas diferentes. O si tienen las mismas áreas tienen diferentes perímetros. El área de un círculo de radio R vale πR^2 ; y el perímetro $2\pi R$. El lado del cuadrado que hace la cuadratura por área vale $R\sqrt{\pi}$, y el perímetro, por tanto, vale $4R\sqrt{\pi} \approx 7,0898R$. Es decir, que el cuadrado de la misma área que el círculo tiene mayor perímetro que este ($7,0898R > 6,2831R$). Un cuadrado que se aproxima al círculo por área se aleja por perímetro y viceversa.

⁶¹ *Arbre de ciència*, ORL XI, p. 217, y Zepeda, *Árbol de la Ciencia* (Árbol humanal, «Aritmética») p. 102: «El aritmético [...] considera las situaciones de las figuras según que son colocadas adelante o atrás en el arte del guarismo», entendiendo que *figura* se refiere al signo o cifra de la numeración indo-arábiga (guarismo), y la colocación se refiere a la notación posicional decimal. Por consiguiente, una vez más Llull denota conocimiento matemático reciente, en este caso de la introducción en Europa por Leonardo de Pisa (*Liber de abaci*, 1202) de la numeración decimal posicional con cifras indo-arábigas.

⁶² La referencia al número pi es una forma de comparar el grado de exactitud de la cuadratura. Llull no habla en ningún sitio de ese número, ni tampoco aparece el concepto en ningún tratado medieval. En textos medievales árabes, por ejemplo, aparece la aproximación de Arquímedes de $22/7$ (3 y $1/7$), que debía ser conocida en Europa, pero no se conocía por este nombre, *pi*, la relación entre el área de un círculo y el cuadrado del radio.

La cuadratura del círculo se justifica a partir de un triángulo y un cuadrado inscritos: está claro que Llull trabaja sobre las tres figuras básicas de su cosmología.

Llull manifiesta que la cuadratura se ha demostrado de dos formas, matemáticamente y por los sentidos.⁶³

La cuadratura del círculo ha sido demostrada de dos maneras, matemáticamente y por los sentidos.⁶⁴

Por consiguiente, se puede conocer que el Arte general es útil para el saber. Ya que si por él [Arte] se ha podido tener ciencia de la cuadratura del círculo, lo cual no pudieron conocer los sabios antiguos con sus ciencias, manifiesta cosa es que el Arte general, hallado recientemente, es útil para el saber, pues por él [Arte] se puede tener ciencia de aquello que las antiguas ciencias no podían conocer.⁶⁵

Con este último párrafo concluye Llull la primera parte de *De quadratura*. Consideramos que su satisfacción era legítima: su método era único y original y, una vez más, diferente de cualquier autoridad precedente.

Llull presentó el método (2) de la quadratura en la *Geometria nova*. Este método se sintetiza con la figura que él llama *Figura magistralis*. También explica varias maneras de justificar dicha figura y en una de ellas remite a la cuadratura efectuada con el método (1), expuesto en las líneas anteriores.

La *Figura magistralis*, fig. 5 del anexo, se resume en un círculo con un cuadrado inscrito y otro circunscrito. El cuadrado que hace la cuadratura es el intermedio equidistante de los dos. Sin entrar en el detalle explicativo de los cálculos y aproximaciones que ello implica, hay que decir que este cuadrado intermedio no es exactamente igual a los cuadrados del método (1); son parecidos, visualmente similares, pero analíticamente no son idénticos.

El cuadrado intermedio, significado por r.s.t.u., entre el cuadrado grande [circunscrito al círculo] y el pequeño [inscrito al círculo], es el cuadrado que estamos investigando como el que realiza la cuadratura del círculo, en tanto que el círculo y el cuadrado son visiblemente equivalentes en contenido y en capacidad, y ello se probará con el Art.⁶⁶

⁶³ Podría suponerse que la prueba matemática fuese un método algebraico, es decir, de cálculo típico de la geometría práctica, en cambio la prueba sensorial se refiere a un método de geometría especulativa o elitista. Así, la prueba sensual será la representación gráfica de la imaginación, es decir, la concreción de una idea abstracta, el paso de una opinión a una demostración.

⁶⁴ Llinarès, «quadrature» (citado *supra*, n. 5), p. 134.

⁶⁵ *Ibid.*, p. 138.

⁶⁶ Millás, *El libro de la «Nova geometria»* (citado *supra*, n. 1), p. 56, y Dambergs, *The New Geometry* (citado *supra*, n. 6), p. 3. La sentencia «equaliter valent per continenciam et capacitatem, et hoc apparet ad sensum» se puede interpretar, ya que es verosímil y matemáticamente demostrable, en el sentido de que

La suposición de un cuadrado intermedio equidistante no es explicada claramente por Llull, que utiliza el término ambiguo «in medio».⁶⁷ Esta ambigüedad recuerda al razonamiento de Brisón, tal como la recoge E. Pistolesi.⁶⁸ Brisón, sofista del siglo IV, al que se atribuye un razonamiento erístico, criticado por Aristóteles, que viene a decir: «así como el círculo es intermedio entre el cuadrado inscrito y circunscrito, y el cuadrado intermedio también lo es entre el cuadrado inscrito y el circunscrito, entonces el cuadrado intermedio es igual al círculo».⁶⁹ Hay que decir que este texto atribuido a Alejandro de Afrodisia (uno de los principales comentaristas de Aristóteles) no especifica cómo debe ser este cuadrado intermedio. De hecho, debe existir un cuadrado intermedio que hace la cuadratura, es obvio. Llull propuso, supuestamente, la mitad equidistante, que es una posibilidad, y una buena aproximación.

Para salir al paso del asombro ante la prueba sensorial de la cuadratura luliana, la de los sentidos, se debe recordar que Llull no estaba escribiendo una obra especializada en geometría euclidiana, lo dice expresamente en la introducción de la *Geometria nova*: «así lo acordamos con números planos sin entrar ni en algoritmos ni fórmulas».⁷⁰ La prueba de los sentidos debe entenderse como la representación gráfica de un problema que se puede resolver por la imaginación. Tal como decía el matemático David Hilbert, la intuición visual, en lugar de rigurosas fórmulas, apoyada en figuras, ayuda al estudioso a penetrar en la esencia de la materia geométrica sin tener que someterse a una laboriosa formación.⁷¹ Ciertamente, existe un cuadrado intermedio entre el inscrito y el circunscrito que efectúa la cuadratura por área del círculo. Eso la imaginación lo puede entender y entonces Llull lo

el cuadrado intermedio equidistante es la mejor (o casi) aproximación a la cuadratura del círculo por área (*capacitatem*) y por perímetro (*continenciam*) al mismo tiempo. Dos cuadraturas en una sola figura.

⁶⁷ Millás, *ibid.*, p. 56: «Inter quadrangulum maiorem et minorem positus est in medio unus quadrangulus significatus per r.s.t.u.» («r.s.t.u.» son las letras que se refieren al dibujo del cuadrado intermedio, y supuestamente equidistante entre el inscrito o menor y el circunscrito o mayor, de la cuadratura).

⁶⁸ Pistolesi, «Ramon Llull, la geometria i les quadratures del cercle» (citado *supra*, n. 54), p. 112.

⁶⁹ En González Urbaneja, *Los Elementos de Euclides* (citado *supra*, n. 25), se puede ver otro enfoque equivalente, comparando el método de Brisón con el de Antifón y con el método de exhaución (Eu-do-xo-Arquímedes), pp. 124-126.

⁷⁰ Ver nota 81.

⁷¹ Salvando la distancia de siete siglos, el matemático David Hilbert, en el prefacio de un libro de divulgación geométrica, remitía a la importancia de la capacidad visual e intuitiva de la imaginación y, en lugar de fórmulas, valoraba utilizar la ayuda de figuras a efectos de poder penetrar en la esencia de las matemáticas sin ser un especialista. V. David Hilbert y S. Cohn-Vossen, *Anschauliche Geometrie* (Berlín: Julius Springer, 1932), versión inglesa en *Geometry and the imagination* (Nueva York: Chelsea Publishing Company, 1952).

expresa, lo hace visible para todo el mundo de dos formas: por razón de los sentidos (*Geometria nova*) y por razón matemática (*De quadratura*).

Llull, en resumen, expuso un método de cuadratura en *De quadratura* y luego en la *Geometria nova* expuso varias razones, ajustadas a su Arte, del porqué hay un cuadrado intermedio que hace la cuadratura y lo resumió visualmente con la *Figura magistralis*. Llull se jugaba mucho con estas demostraciones. Se encontraba en París y su objetivo era demostrar que su Arte podía resolver los problemas irresolubles. No sabemos qué pensaron sus co-étáneos, pero las explicaciones de Llull se ajustan a los conocimientos que se podían tener en su época.

7. La *Figura plena*

La *Figura plena* es el emblema geométrico luliano por excelencia. Un círculo, un cuadrado y un triángulo con la misma área que comparten un mismo centro: el resumen visual, sensual y gráfico de la cuadratura y triangulación del círculo, fig. 6 del anexo. Llull presenta esta figura por primera vez en *De quadratura* y es en la segunda aparición, en *Geometria nova*, cuando la denomina *Figura plena*.

Se revisará, en primer lugar, lo expuesto en *De quadratura*, en referencia a esta figura:

Ella es la figura general que resume las figuras y las medidas de los otros círculos. Ella las representa a todas, ya que está compuesta de un círculo, un cuadrado y un triángulo, idénticos los tres.⁷²

La *Figura plena* es el resultado de un proceso que parte de un círculo, un círculo en blanco –Llull lo llama un «círculo blanco». En él se van realizando particiones interiores con líneas y polígonos, concluyendo con la cuadratura y la triangulación del círculo. Estas particiones dan lugar a catorce círculos que le servirán a Llull para demostrar la verdad de la fe católica, una teología *more geometrico*, para su misión apologética:

Inicialmente diremos que Dios no tiene corporalidad, que Él no es una sustancia material ni es cuantificable. Pero es mediante los círculos, sus medidas y sus divisiones, por los cuales nosotros estudiaremos estos principios para adquirir un mayor conocimiento de Dios y de sus actos.⁷³

⁷² Llinarès, «*quadrature*» (citado *supra*, n. 5) p. 137.

⁷³ René Prévost y Armand Llinarès, *Principes et questions* (citado *supra*, n. 5), p. 25.

Llull identifica la figura del primer círculo, el «círculo blanco», como la primera figura, la que contiene en potencia todas las líneas, las medidas y las figuras de los otros círculos. Los otros círculos son círculos que contienen polígonos regulares inscritos en el «círculo blanco». Llull empieza diciendo que, después de haber probado «matemática y sensualmente» el proceso de los círculos (que ha culminado con la cuadratura y triangulación del círculo) gracias al esfuerzo de la imaginación que ha seguido el proceso, la inteligencia humana será capaz de considerar las verdades de las sustancias creadas y se podrán investigar los principios de Dios y de la teología:

Después de lo que se ha dicho del círculo blanco, querremos considerar la unidad y la esencia de Dios, tal como se podrá llevar a cabo por esta vía, y como Dios las ha puesto por semejanza en las criaturas.⁷⁴

El «círculo blanco» significa, tal como Llull expone, la esencia divina y sus dignidades. La analogía geométrica es muy directa: Dios es un principio simple que contiene en Él realmente y naturalmente muchas unidades. El círculo, que tiene una naturaleza simple y eterna, contiene todos los polígonos inscritos que dan lugar a un cuadrado de área igual al círculo. Se liga así la geometría con la cuadratura del círculo y con la teología.

Se puede deducir que un solo Dios produce Dios. Es ello un principio de teología que hace de ella una ciencia.⁷⁵

Analizado el primer círculo, se detallarán tres más a modo de ejemplo. El simbolismo del «círculo blanco» le permite a Llull iniciar la segunda parte de *De quadratura*, la que se refiere a los principios de teología. Pero además utiliza el «círculo blanco» para considerar la unidad absoluta del ser y ello será un principio de filosofía: así la filosofía tendrá concordancia con la teología.⁷⁶

El círculo undécimo, representado geométricamente por un círculo y un cuadrado que hace la cuadratura, Llull lo titula «Jesucristo, Dios y hombre», y dice:

El cuadrado significa la diferencia entre la naturaleza humana y la divina de Jesucristo. El círculo significa la unidad de la persona de Cristo.⁷⁷

⁷⁴ Ibid., p. 27.

⁷⁵ Ibid., p. 29.

⁷⁶ *Començaments de filosofia*, NEORL VI, p. 3: «per açó es coninent cosa que encerquem los començaments de philosophia qui ab los començaments de teologia han concordança e que squivem falsos començaments de philosophia».

⁷⁷ René Prévost y Armand Llinarès, *Principes et questions* (citado *supra*, n. 5), p. 93.

El círculo duodécimo, representado por un círculo y un triángulo equilátero que hace la triangulatura, Llull lo titula «Esencia Divina y Trinidad», y dice:

El triángulo, con sus tres ángulos iguales, significa la divina Trinidad, y dado que los tres ángulos son iguales, significa que las tres personas divinas son iguales. El círculo no tiene ninguna división y su circunferencia, que es continua, significa la unidad de la esencia, la vida, la naturaleza, la bondad, la grandeza divina, etc.⁷⁸

En resumen, la analogía geométrica se sintetiza con el círculo que recoge la idea de la unidad de la esencia de Dios (recordemos, el «círculo blanco»), el cuadrado sintetiza la naturaleza humana de Jesucristo, y el triángulo la Trinidad y la igualdad de las tres personas.

Llull no asigna ninguna explicación al círculo decimocuarto, el que posteriormente denominará *Figura plena*. Pero se puede entender como superposición del undécimo y el duodécimo.

Llull utiliza la geometría como explicación de la naturaleza creada, como herramienta de investigación y como analogía para entender al Creador. El entendimiento de Dios tiene prioridad, constituye la primera intención, y por eso le dedica el primer libro geométrico. Llull lo sintetiza en el resumen final:

Es muy necesario que la santa divina Trinidad sea conocida y amada en el mundo, [...] lo que exige un pensamiento y una voluntad elevados.⁷⁹

La *Figura plena* es nuevamente explicada en el libro de *Geometria nova*, pero con otro estilo, más filosófico y menos teológico.⁸⁰ Si el libro *De quadratura* es una obra donde se liga geometría y teología, en la *Geometria nova* se liga geometría y creación. Ya que la naturaleza se puede entender e investigar en términos geométricos, Llull insiste en la idea de que las figuras que describe son útiles para los filósofos, que investigan la ciencia natural. La geometría, en efecto, fortalece las potencias sensitivas e imaginativas de la mente humana y es útil para conocer los secretos naturales de las sustancias corporales y los accidentes, es decir, la creación tanto en la tierra como en el cielo de los planetas y las estrellas. Gracias a la geometría se refuerza el acto de imaginar de la imaginación y el acto de comprender del intelecto. A medida que se elevan la imaginación, el intelecto y la memoria, se pueden conocer mejor no solo los objetos perceptibles por los sentidos sino también los objetos imaginables

⁷⁸ Ibid., p. 95.

⁷⁹ Ibid., p. 255.

⁸⁰ Hay que recordar que el término *Figura plena* se utiliza por primera vez en el libro de *Geometria nova*, refiriéndose a un círculo, un cuadrado y un triángulo de áreas iguales compartiendo un mismo centro.

(los no perceptibles), como son los objetos espirituales (Dios, ángeles, principios generales y abstractos, como la bondad, grandeza, eternidad...). A partir de las figuras geométricas que se exponen en *Geometria nova*, la humanidad puede sacar gran conocimiento del mundo, es decir, son figuras útiles para la ciencia de los filósofos naturales. Asimismo, de cada figura se pueden deducir maneras de conocer y amar los objetos espirituales. La geometría luliana es una vía para conocer y amar a Dios a través de la creación, y es un instrumento útil para sostener la unidad de teología y filosofía ante la separación entre las dos clases de saber que proponían los averroístas: Creador y creación unidos por la exactitud de la geometría.

Consciente de la dificultad de la ciencia geométrica, en el comienzo de la *Geometria nova* Llull explica que la quiere hacer fácilmente comprensible a todo el mundo:

En esta Art, queremos usar términos comunes y fáciles de entender, así aquellos que no conocen los términos de la antigua geometría podrán conocer esta ciencia, y así lo acordamos con números planos sin entrar en fórmulas algorítmicas.⁸¹

Resumidamente, refiriéndose a la *Figura plena*, afirma:

De esta forma, todas las figuras compuestas, sean naturales o artificiales, descienden y derivan de las figuras circulares, cuadradas y triangulares. Esto se puede ver, por ejemplo, en la figura del hombre, o en la forma del escudo, en los cuales algunas partes significan el círculo, otras el cuadrado y otras el triángulo.⁸²

Esta sentencia encierra dos referencias geométricas, una referida a la forma del hombre y otra, que se quiere proponer como hipótesis en este artículo, referida al escudo,⁸³ como una metáfora que apunta al secreto de Dios, es decir, a la Trinidad.

⁸¹ Millás, *El libro de la «Nova geometria»* (citado *supra*, n. 1), p. 55, y Dambergers, *The New Geometry* (citado *supra*, n. 6), p. 1. De esta declaración de intenciones cabe destacar dos aspectos: el primero, la referencia al término *algorissmi*; el segundo, la referencia a «número plano». El hecho de tratar la geometría con algoritmos hace pensar en la geometría práctica y en la resolución de problemas con ayuda de cálculos algebraicos típica de los tratados persas, en lugar de una geometría imaginativa y pura de origen griego. Se puede entender el número plano como aquel que representa valores enteros, aproximaciones prácticas sin decimales. Llull, en todo caso, proporciona figuras y enunciados, proporciona resultados con números enteros, pero sin aportar demostraciones. El término *algoritmo* proviene del nombre del matemático persa al-Khwarizmi (780-850). La utilización del término *algorismus* no se da en el Occidente europeo hasta el siglo XII, gracias a los trabajos de arabistas, traductores y matemáticos, como Robert de Chester, Gerard de Cremona y Adelard de Bath. Por lo tanto, el uso del término por parte de Llull, en latín, debe considerarse temprano y plenamente conocedor de la actualidad matemática de su tiempo.

⁸² Millás, *ibid.*, p. 60, y Dambergers, *ibid.*, p. 9.

⁸³ *Escudo* puede significar un arma defensiva fabricada de cuero, metal o madera y sujeta con el brazo mediante un asa. Los escudos han ido variando y evolucionando a lo largo de la historia. Los había

Comenzamos, pues, por la primera parte, la que hace referencia al hombre. Todas las figuras compuestas, la creación en sentido amplio, la naturaleza terrenal y los cielos astronómicos, derivan de las figuras circulares, triangulares y cuadrangulares, tal como cita infinidad de veces Llull en el *Arbre de ciència*. La figura del hombre no es excepción, por tanto, en el hombre se representan las tres formas básicas. Esta idea geométrica-humana se remonta al *homo ad quadratum* y al *homo ad circulum*; ya la expresó Vitruvio en su libro *De architectura*,⁸⁴ y la recogió pictórica y magistralmente Leonardo da Vinci (fig. 3 del anexo).⁸⁵ El aspecto del hombre se relaciona con las proporcionalidades de triángulos, cuadrados y círculos, y Llull sostiene que la geometría era de utilidad en la fisiognomía. En el capítulo *De figuris triangulorum et quadrangulorum* nos dice:

Por la mezcla y situación de varias cámaras [refiriéndose a cuadrados y triángulos] los geómetras pueden conocer la composición de ángulos, y los fisionomistas pueden entender las formas humanas [...].⁸⁶

La afirmación del párrafo anterior sorprendió negativamente a José M.^a Millás.⁸⁷ No hay motivo para ello. La relación de la fisiognomía y la geometría

circulares y rectangulares; los cuadrados eran poco habituales. La forma de lágrima se puso de moda en el siglo *x*i y evolucionó a forma triangular en el siglo *xiii*. Por lo tanto, la forma de los escudos podía ser circular, triangular o cuadrangular. Se intentará explicar que Llull podía estar pensando en un escudo como obra artificial pero que usó este ejemplo para referirse a una idea más elevada, una alegoría de la Trinidad. Además, existe una coincidencia cronológica con el tratado del dominico William Peraldus (1190-1271) conocido como *Summa vitiorum*, en torno de los años 1255-1265. Esta obra, conservada en el Harleian ms. 3244, folios 27-28, muestra la figura de un caballero armado con un escudo, con la figura del Scutum fidei, que combate contra los siete pecados capitales. V. la fig. 2 del anexo, donde se visualiza una relación figurativa triangular y circular entre las tres personas divinas.

⁸⁴ Marco Vitruvio Pollion (80-70 a. C. - 15 a. C.), autor del tratado de arquitectura más antiguo que se conoce, *De architectura*, un compendio de conocimientos de arte y materiales, de proporciones (forma y razón) que deben cumplir los edificios y las ciudades, y las razones matemáticas para la estética y la funcionalidad. Introduce someramente las proporciones de la figura de un hombre dentro de un círculo y dentro de un cuadrado, y su relación con la arquitectura de templos. Se pueden ver estas figuras dibujadas de forma muy elemental en la versión en español de Miguel de Urrea, M. Vitruvio Pollion, *De architectura* (Alcalá de Henares: Juan Gracián, 1582), donde también considera que el número 16 es el más perfecto: «[los antiguos] después consideraron entre ambos números ser perfectos, el seis y el diez, juntáronlos entreambos en uno, y hicieron el número perfectísimo de dieciséis», pp. 35-36. ¿Llull podría haber conocido esta obra clásica? Esta hipótesis podría explicar el porqué en su libro de *Geometria nova* Llull se refiere a las proporciones de algunas construcciones (torres, campanarios, iglesias, fortificaciones), igual que había hecho Vitruvio en su tratado. Además, está documentada la existencia de manuscritos y, por tanto, el conocimiento del *De architectura* en la Edad Media: Carol Herselle Krinsky, «Seventy-eight Vitruvius manuscripts», *Journal of the Warburg and Courtauld Institutes* 30, (1967), pp. 36-70. <www.jstor.org> (26 de enero de 2020).

⁸⁵ Imagen tomada de <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:0_The_Vitruvian_Man_by_Leonardo_da_Vinci.jpg>.

⁸⁶ Millás, *El libro de la «Nova geometria»* (citado *supra*, n. 1), p. 65, y Damberg, *The New Geometry* (citado *supra*, n. 6), p. 20.

⁸⁷ Millás, *ibid.*, p. 31.

es comprobable en tratados de esta ciencia y en cualquier aspecto de la moda actual cuando se ajustan ropas, peinados y maquillajes según los aspectos de la cara sean más de tipo triangular, circular o cuadrangular. Luca Pacioli dejó constancia del tratamiento geométrico de la fisonomía humana en su obra *De divina proportione* (en torno a 1498), texto acompañado de dibujos de Leonardo da Vinci (fig. 4 del anexo).⁸⁸

La figura del hombre tiene, pues, relación con las tres formas geométricas básicas. Veamos la segunda parte de la frase: «las figuras circulares, cuadradas y triangulares se pueden ver en la forma del escudo».⁸⁹ Propondremos que la forma del escudo trata de la significación o alegoría de la Trinidad. Esta hipótesis se fundamenta en los siguientes diez motivos:

- 1) La palabra *escudo* es una forma implícita de hablar del secreto de Dios. El Escudo de la fe, *Scutum fidei* o Escudo de la Trinidad, es la denominación de la representación visual del símbolo de Atanasio, que tuvo varias representaciones heráldicas en la Edad Media en Francia e Inglaterra, básicamente unos círculos con los nombres de *Pater*, *Filius*, *Spiritus Sanctus* y *Deus*, unidos con líneas formando una composición triangular (ver nota 83 y fig. 2 del anexo). El Quicumque o Symbolum fidei (la profesión de fe, no el símbolo heráldico) fue indicado por Santo Tomás como manifestación de la fe, y utilizado por Llull como pieza argumental en el *Liber tartari et christiani seu Liber super Psalmum Quicumque vult* (1288).
- 2) En la Biblia se expresa la idea de Dios como protector de los creyentes: «Él es nuestro escudo» (Salmos 33,20); «Sobre todo, tomad el escudo de la fe» (Carta a los efesios 6,16).
- 3) En el *Llibre de contemplació en Déu* (ORL VIII, cap. 335, §16, p. 245), siguiendo la compleja demostración, que se presenta mediante letras, se puede inferir que el «secreto» de Dios es el «secreto» de la Trinidad, y Platzeck afirmaba «un escudo, símbolo del secreto divino» y «La figura geométrica del libro de la contemplación no es un círculo sino, como ya se ha dicho, un escudo».⁹⁰ A pesar de ello

⁸⁸ Imagen tomada de <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/d/d7/Pacioli_De_Divina_Proportione_Head_Equilateral_Triangle_1509.jpg>.

⁸⁹ No hay constancia de que esta frase haya sido comentada anteriormente y, sin embargo, la comprensión de la geometría luliana pasa necesariamente por lo que en ella se sugiere.

⁹⁰ Platzeck, «Descubrimiento y esencia» (citado *supra*, n. 48), pp. 143-144.

no se justifica explícitamente en el texto del *Llibre de contemplació en Déu* el porqué de que aparezca una figura en forma de escudo.⁹¹

- 4) Tal como lo expresa Llull, un círculo, un cuadrado y un triángulo con la misma área tanto valen uno como otro; es una certeza matemática que por analogía se extrapola a Dios Padre, Hijo y Espíritu Santo, las tres personas son iguales en esencia, y tanto vale una como otra.
- 5) Roger Bacon afirmaba: «y es muy necesario añadir, que es imposible conocer la beatitud de la Trinidad y su esencia unitaria sin la ayuda de un ejemplo sensible como una cuestión de geometría».⁹² Afirmación que Llull expresa, en el *Llibre de Contemplació en Déu* (ORL VIII, cap. 335, § 2, p. 239), de la siguiente manera: «Qui ardentment e declaradament vol, Sènyer, adorar e contemplar lo vostre sant secret gloriós, cové que sapia afigurar figures sensu- als per tal que's pusca mudar a contemplar vostre secret ab figures entellectuals». La *Figura plena* sería el ejemplo más firme de la Trinidad por analogía, tres figuras iguales en esencia compartiendo una sola representación.
- 6) El undécimo círculo de *De principiis theologiae* representa un círculo con un cuadrado haciendo la cuadratura. La analogía que expone Llull es la de Dios hecho hombre, Jesucristo: «toda la creación es contenida dentro del círculo y el cuadrado».
- 7) El duodécimo círculo de *De principiis theologiae* representa un círculo con un triángulo haciendo la triangulatura. La analogía que expone Llull es la de la esencia divina y la Trinidad: «El triángulo con sus tres ángulos significa la Trinidad [...] el círculo con la circunferencia continua significa la unidad de la esencia, de la vida, de la naturaleza, de la bondad, de la grandeza».

⁹¹ Albert Soler y Anthony Bonner, «Les representacions gràfiques al *Llibre de contemplació* de Ramon Llull», en *Els manuscrits, el saber i les lletres a la Corona d'Aragó, 1250-1500*, Lola Badia et al. (eds.) (Barcelona: Publicacions de l'Abadia de Montserrat, 2016), p. 228.

⁹² Roger Bacon, *Opus Maius*, edición latina de John Henry Bridges (Londres: Williams and Norgate, 1900) [reed. *The Opus majus of Roger Bacon* (Cambridge: Cambridge University Press, 2010)]. En el *Opus Maius* (1267) Bacon trata de la utilidad de las matemáticas tanto en la física («Mathematicae in physica utilitas») como en la teología («Mathematicae in Divinis utilitas»). La coincidencia con Llull no puede ser ignorada. A modo de ejemplo se han extraído algunas afirmaciones de Bacon totalmente autojustificativas y ajustadas al ideario luliano, p. 108: «He encontrado famosísimos hombres [...], que, basándose en el poder de las matemáticas, sabían como explicar las causas de todas aquellas cosas tanto humanas como divinas»; p. 175: «y todos entienden que la teología no puede ser conocida sin el conocimiento de la filosofía, necesario es que el teólogo conozca las matemáticas».

- 8) En el *Arbre de ciència*, en concreto en el Árbol ejemplifical, «Del exempli de quantitat celestial», Llull relata una bellísima alegoría: el círculo tiene más semejanza a Dios, por no tener ni principio ni fin; el cuadrado es más parecido a Dios que el triángulo por los cuatro elementos que forman el hombre para que pueda amar y conocer a Dios; el triángulo es más parecido al alma de los hombres y a la Trinidad. Por lo tanto, las tres figuras están enlazadas y son equivalentes, representando a Dios y al hombre también.⁹³
- 9) Concilio de Florencia (1445). En este Concilio se estableció que en Dios hay una sola naturaleza, dos procesiones, tres personas y cuatro relaciones. La analogía se establece en el libro *De principiis theologiae*: un «círculo blanco» (que lo contiene todo, una naturaleza o esencia); del «círculo blanco» se extraen el triángulo y el cuadrado (dos procesiones), que se corresponden con el círculo quinto, triángulo dentro del círculo (producción de las personas divinas), y con el círculo sexto, cuadrado dentro del círculo (igualdad de las personas divinas); y cuatro relaciones divinas y eternas (que Llull sintetiza en: Dios es Dios, Dios es Dios en Dios, Dios es Dios de Dios, Dios tiene Dios en Dios).
- 10) Libro de la Sabiduría (13,1-3 y 5): «Sí, vanos por naturaleza son todos los hombres que han ignorado a Dios, los que, a partir de las cosas visibles, no fueron capaces de conocer a “Aquel que es”, al considerar sus obras, no reconocieron al Artífice [...]. Porque, a partir de la grandeza y hermosura de las cosas, se llega, por analogía, a contemplar a su Autor.»

⁹³ *Arbre de ciència*, ORL XII, pp. 417-418, y Zepeda, *Arbol de la Ciencia*, p. 360-361: «Cuentase que el círculo, quadrangulo y triangulo se encontraron reciprocamente en la cantidad, que era su madre y tenia una mançana de oro. Y pregunto a sus hijos, si ellos sabian a quien devia dar aquella mançana: y respondio el circulo, que el la devia tener; porque era el primogenito, el mayor, y el que corria más fuertemente que sus hermanos. Y el quadrangulo dixo, que a el le pertenecia: por quanto era mas cercano a el hombre que el circulo; y que también era mayor que el triangulo: pero el triangulo dixo en contra, que el devia tener aquella mançana; porque era mas proximo a el hombre que el circulo, y más semejante a Dios que el quadrangulo. Y entonces la cantidad dio la mançana a su hijo el triangulo. Pero Ariete y sus hermanos, y Saturno y sus hermanos reprehendieron a la cantidad; y dixeron, que havia juzgado mal; porque el Quadrado y Triangulo no tenian semejança alguna con Dios en lo ancho, largo, y profundo; y el circulo tenia semejança; porque no tenia principio ni fin. Y el quadrado reprehendió a la cantidad y dixo que no havia juzgado bien; porque el era mas semejante a Dios que el triangulo en los quatro elementos: por razon de que sin estos no podrian ser los hombres; los quales son para que amen y conoscan a Dios. Pero el triangulo excuso a la cantidad su madre, y dixo, que ella havia juzgado bien, en quanto el era mas semejante a el alma del hombre, y a la Trinidad de Dios por el número ternario, que sus hermanos el circulo y quadrangulo: Empero que havia errado en quanto le havia dado a el la mançana redonda, que no era de su figura.»

Estas diez razones permiten entender que la *Figura plena* es una alegoría de la Trinidad de Dios. Nuestra hipótesis es que Llull oculta la significación del escudo tras la analogía geométrica de la *Figura plena*.

8. La *Figura medii trianguli*

Llull presenta la *Figura medii trianguli* como una consecuencia de la *Figura magistralis*, encerrando en ella una interesante relación matemática. Esta figura se representa en la fig. 11 del anexo.⁹⁴

La *Figura medii trianguli* se representa con un triángulo rectángulo que se divide en tres partes mediante dos líneas paralelas a la base. Estas partes Llull las denomina «a, b, c». Cada parte debe tener la misma área, es decir, que tienen que ser equivalentes por capacidad o cabida. De forma resumida, afirma que *c* valdrá IX unidades, *b* valdrá IV, y *a* valdrá III. Tal como se puede ver, *a* es la altura de un trapecio (derivado del truncamiento del triángulo) y vale 3; *b* es la altura de otro trapecio y vale 4, y finalmente *c* es la altura del triángulo (triángulo superior restante) y vale 9.

Utilizando la imaginación, sostiene Llull, se alcanza una suposición lógica si se utiliza la geometría con el fin de aumentar el poder del intelecto. Debemos ver tres triángulos rectángulos, uno de altura 16 (9 + 4 + 3), otro de altura 13 (9 + 4), y otro de altura 9, ver fig. 12 del anexo. El triángulo de altura 16 aproximadamente tiene triple área que uno de altura 9, y uno de altura 13 tiene aproximadamente doble área que uno de altura 9.⁹⁵ Por lo tanto, los tres triángulos son, en términos matemáticos, similares, equivalentes o proporcionales; difieren en área pero no en la forma, esencialmente son el mismo tipo de triángulo. Estos tres números, 16-13-9, como es sabido, tienen gran importancia en la obra luliana.⁹⁶

⁹⁴ La *Figura magistralis* viene definida por un cuadrado inscrito de valor 8 cámaras (o en términos modernos se podría decir 8 unidades arbitrarias de área). *Cámara* o *domus* es la palabra que utiliza Llull. El cuadrado circunscrito, que efectivamente tiene doble área que el inscrito, tiene, por tanto, por valor 16 cámaras, y el intermedio valdrá 12 cámaras, siendo 12 el valor medio entre 8 y 16. Por lo tanto, el cuadrado medio tiene cabida media pero ya no sería equidistante entre ambos, tal como afirma. Lo que sí se quiere resaltar es que la relación de la *magistralis* es una sucesión de áreas que valen 8-12-16, y la de la *medii trianguli*, como se demostrará, tiene por valores 9-13-16, en progresión de lados, y manteniendo incrementos de área constantes. Por tanto, la *medii trianguli* no derivaría de la *magistralis* tal como Llull justifica.

⁹⁵ Millás, *El libro de la «Nova geometria»* (citado *supra*, n. 1), p. 62: «Est ergo c. in IX gradu unitatum et b. in XIII et a. in XVI, habente c. IX unitates et b. IIII et a. III»; Dambergers, *The New Geometry* (citado *supra*, n. 6), p. 14.

⁹⁶ 16 es el número de dignidades divinas representadas en la Figura A en las primeras obras del Arte, de la denominada fase cuaternaria. Además, en esta fase la Figura S y la X también contienen 16 cámaras o conceptos, también sintetizados por un alfabeto de letras (de la B a la R). A partir del *Ars inventiva veritatis* (1290), en la que se ha convenido en denominar fase ternaria, el alfabeto se reduce a 9 letras polisémicas (9 principios de la Figura A, 9 principios de la Figura T, 9 cuestiones o reglas, 9 sujetos, 9 virtudes y 9 vicios).

La pregunta que se plantearía un matemático hoy día sería si los valores que dio Llull son verdaderos y exactos, según la geometría euclidiana, aplicada a figuras planas. El enunciado del problema sería: calcular los valores b y a , sabiendo que c vale 9, valor de partida, y las tres áreas de la *Figura medii trianguli* valen lo mismo. La solución se puede calcular fácilmente con la ayuda del cálculo, es decir, aplicando la geometría analítica. Y los valores que se obtienen a partir de « $c = 9$ » son: « $a = 2,8605...$ » (que Llull aproximó a 3), y « $b = 3,7279...$ » (que Llull aproximó a 4). Se podría pensar que es una aproximación poco precisa, pero si pensamos que en su época no se empleaba la numeración indo-arábiga (al menos de forma extendida), ni la decimal posicional, tan solo la geometría basada en el dibujo (regla y compás) y el ábaco, el resultado es bueno y razonablemente ajustado. Además, Llull ya nos advertía en el comienzo de la obra que se limitaría a utilizar números planos (entendemos que sin decimales) y sin entrar en complicados algoritmos.

A partir de esta figura se desarrolla el siguiente análisis, que se resume en siete puntos:

- 1) Ramon Llull, sin explicitarlo, anuncia las propiedades de las proporciones geométricas de las figuras similares o proporcionales a partir de la *Figura medii trianguli* y lo extrapola a una sucesión de tres triángulos (*Figura trium triangulorum*), tres cuadrados (*Figura trium quadrangulorum*) y tres círculos (*Figura trium circularum*), ver fig. 8 del anexo. La sucesión de figuras indica que la cabida de la figura contenida es igual a la del continente, y los valores, « a b c », son derivados de la *medii trianguli*, y, por lo tanto, son siempre 9-4-3 (con la aproximación antes mencionada), tanto para los círculos, como para los cuadrados como para los triángulos. Así, en el caso de la *Figura trium triangulorum*, figura representada por tres triángulos concéntricos, lo explica así:

Esta figura proporciona una doctrina por la cual se utiliza el *medii trianguli* para situar triángulos unos dentro de otros, de forma que el triángulo contenido es equivalente al continente, y por esto esta figura es útil para las medidas recíprocas, ya que una medida vale tanto como otra en esencia, naturaleza, y virtud.⁹⁷

El 13 representa a Jesucristo y los doce apóstoles, según el *Llibre de contemplació en Déu* (1273-1274), y el número de frailes de Miramar, y también es el número de partes en que se divide el *Ars generalis ultima* (1305-1308), y las trece figuras del *Compendium seu Commentum artis demonstratiuae* (1289).

⁹⁷ Millás, *El libro de la «Nova geometria»* (citado *supra*, n. 1), p. 63, y Dambergs, *The New Geometry* (citado *supra*, n. 6), p. 15.

Llull sigue justificando la semejanza de proporciones como si aportara una versión simplificada del Libro VI de los *Elementos* de Euclides. De la *Figura trium circularum*, figura representada por tres círculos concéntricos, afirmaba:

Esta figura, además, es útil esencialmente y naturalmente para igualar el círculo con el triángulo, dado que la medida a. en esta figura es equivalente a la a. en la *Figura trium triangularum*, y lo mismo para las medidas b. y c.⁹⁸

La *Figura trium quadrangulorum*, figura representada por tres cuadrados concéntricos, sintetiza de nuevo la idea de equivalencia (como si la cuadratura no fuera suficiente para hacer equivalentes las tres figuras básicas), y Llull decía con total precisión geométrica:

Así, a. en la figura de los cuadrados es equivalente a la a. en la figura de los triángulos y a la a. en la figura de los círculos, y lo mismo con la b. y la c.⁹⁹

Una vez investigada la verdad ideal y absoluta con la ayuda de la matemática, Llull remata la utilidad diciendo, refiriéndose a la *trium quadrangulorum*:

Esta figura, como las otras dos [*trium circularum* y *trium triangularum*], es útil a los filósofos naturales y a los geómetras, ya que enseña que las sustancias triangulares son equivalentes a las sustancias circulares, las cuales permiten cuantificar las mezclas de figuras y valores, y este conocimiento es de gran contribución a la filosofía.¹⁰⁰

- 2) La cuantificación que Llull proporciona para la *Figura medii triangulari* es un caso singular, que se puede generalizar con la expresión:

$$c(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$$

Y que, partiendo de $c = 9$, tal como indica Llull, se obtienen los valores ya citados de b y a , ver fig. 8 del anexo:

$c = c(\sqrt{1} - 0) = c$; c es el valor de partida, donde 9 es el valor propuesto.

$b = c(\sqrt{2} - \sqrt{1}) = 3,72792\dots$ (recordemos que Llull lo aproxima a 4)

$a = c(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 2,86053\dots$ (y que lo aproxima a 3)

La altura del triángulo, o el lado del cuadrado, o el radio del círculo, se expresa como:

$$r(n) = a + b + c + \dots + (n-1) + n = c\sqrt{n}$$

$$r(1) = c = 9; \quad r(2) = c + b = 9\sqrt{2} \approx 13 \quad (9+4);$$

$$r(3) = c + b + a = 9\sqrt{3} \approx 16 \quad (9+4+3)$$

⁹⁸ Millás, *ibid.*, p. 64, y Dambergs, *ibid.*, p. 17.

⁹⁹ Millás, *ibid.*, p. 65, y Dambergs, *ibid.*, p. 19.

¹⁰⁰ Millás, *ibid.*, p. 65, y Dambergs, *ibid.*, p. 19.

La representación visual y geométrica para la *Figura medii trianguli* se detalla en la fig. 12 del anexo.

- 3) A partir de la proporcionalidad de áreas (recordemos que el triángulo de altura 16 tiene triple área que el de 9, y el de altura 13 tiene doble área que el de altura 9; y esas relaciones son válidas además en los cuadrados y en los círculos), se extraen las siguientes relaciones:

$$16^2 \approx 3 \times 9^2 \quad \text{y} \quad 13^2 \approx 2 \times 9^2; \text{ y, por tanto,}$$

$$\frac{16}{13} \approx \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \frac{16}{9} \approx \sqrt{3} \quad \frac{13}{9} \approx \sqrt{2}$$

Se ha indicado el símbolo de igualdad aproximada para entender la aproximación hecha en los tamaños «a-b-c» de la *Figura medii trianguli*, tal como hemos visto en el apartado anterior.

La relación entre los números 16 y 9 coincide (insistimos, con un cálculo aproximado) con el lado de un triángulo equilátero inscrito en un círculo (raíz cuadrada de tres), y el 13 y el 9 con el lado de un cuadrado inscrito en un círculo (raíz cuadrada de dos). Por lo tanto, el 16, el 13 y el 9 relacionan respectiva e implícitamente un triángulo equilátero inscrito y un cuadrado inscrito en un círculo de radio 9 (ver fig. 13 del anexo).

Los valores $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$ expresan la razón del lado de un triángulo equilátero y de un cuadrado, respectivamente, inscritos dentro de un círculo de radio arbitrario R. No sería nada extraño que Llull, sin explicitarlo, con estas razones de proporcionalidad reforzara su idea de que el «círculo blanco»¹⁰¹ contiene todas las figuras. Todo ello implica los números 16 y 9, que son los que cuantifican los principios de su Arte. Sería, por tanto, la razón geométrica con la que Llull interpretaba la base de la creación del mundo material fundamentada en círculos, triángulos, y cuadrados; la que, por analogía, justificara la presencia y cuantificación de los principios en la creación y las dignidades del Creador.

¹⁰¹ Recordemos que el «círculo blanco» es el nombre que Llull da a la primera figura del *Liber de quadratura et triangulatura circuli sive De principiis theologiae* (1299). A partir de esta figura y hasta catorce, Llull desgana su original y aproximado método de la cuadratura del círculo. Él mismo nos recordaba que «[el círculo blanco] significa que puede contener en él todas las figuras y todas las medidas de los otros círculos». Los «otros círculos» son, por ejemplo, un círculo con un triángulo inscrito, con un cuadrado inscrito, con un pentágono inscrito, con un hexágono inscrito, etc.

- 4) J. M.^a Millás, cuando explica la *Figura medii trianguli*, queda decepcionado por la falta de precisión matemática de Llull. Millás cree que Llull expresaba una relación inexacta de 13/9 igual a 16/13 y llega a proponer un error en los números romanos. El XIII debía ser XII, lo que daría la relación exacta, es decir de 12/9 igual a 16/12.¹⁰² Es evidente que Millás no había captado que la *Figura medii trianguli* no es una relación de números sino de áreas con las implicaciones que acabamos de indicar. Llull, evidentemente, dejó implícita la demostración.
- 5) Robert Pring-Mill publicó dos artículos¹⁰³ donde se planteaba la cuestión del porqué el número de principios era dieciséis en las versiones del Arte antes del *Ars inventiva veritatis* (1290) y nueve a partir de esta obra. Son, sin duda, dos magníficos artículos que explican el funcionamiento del Arte especialmente en los ámbitos de la cosmología y de la medicina, explicando el significado de algunas figuras del libro de *Geometria nova* en estos dos ámbitos. Ciertamente, el número 16 es el cuadrado de 4 (relacionando cuatro con un cuadrado) y el 9 es el cuadrado de 3 (relacionando tres con un triángulo), como Pring-Mill recuerda. Con la hipótesis presentada en este artículo cabe concluir que los números 9 y 16 no serían números arbitrarios, sino que son necesarios, y posiblemente únicos, al estar ligados geoméricamente.¹⁰⁴
- 6) La *Figura medii trianguli* es el triángulo de Platón. Recuperemos el relato inicial del *Timeo* de Platón mencionado anteriormente: uno de los triángulos más bellos es la mitad de un equilátero. Es precisamente este triángulo el que posiblemente Llull utilizó para hacer la demostración implícita de la figura. El presente artículo lo prueba.
- 7) El ejemplo de la *Figura medii trianguli* no es un ejemplo geométrico casual. Llull demuestra con este ejemplo un dominio práctico de la geometría euclidiana. Ya se ha señalado anteriormente que la división de un triángulo en dos o en tres partes iguales era un ejercicio

¹⁰² Millás, *El libro de la «Nova geometria»*, (citado *supra*, n.1), p. 27.

¹⁰³ Robert Pring-Mill, «El número primitivo de las dignidades en el “Arte General”», *SL* 1, núm. 3 (1957), pp. 309-334, y *SL* 2, núm. 2 (1958), pp. 129-156.

¹⁰⁴ No se han podido analizar todas las series numéricas que se derivan de la *medii trianguli*, pero la que empieza en el 9 es la única que cumple con ser cuadrática en el primer y en el tercer número, al menos entre los primeros diez números enteros. Por ejemplo, si en lugar de 9 se hubiese elegido 4, entonces hubiesen sido 6 y 7 (números que no son cuadrados enteros). Si se hubiese elegido 25, entonces hubiesen sido 35 y 43 (números que no son cuadrados enteros). Todo ello siguiendo la relación de áreas y las aproximaciones a números enteros.

común en los libros prácticos de geometría de la época medieval con antecedentes de la época griega.¹⁰⁵

Si bien Llull no explicó nunca las razones del cambio de 16 principios a 9, dejó constancia de que la *Figura medii trianguli* es un instrumento utilizado para crear partes iguales en otras figuras; una relación de semejanza y equivalencia que deja el camino abierto a posteriores estudios e investigaciones.

La equivalencia entre los números 16 y 9 lleva implícito un sutil mensaje que solo se comprende desde la nueva geometría luliana. El mensaje conlleva una articulación ternaria pasando por el 13: 9-13-16, a partir de comparar áreas de figuras geométricamente similares. Además, esta relación ternaria deriva del cuadrado y el triángulo inscritos dentro del círculo, lo que Llull llamó el «círculo blanco», generador de todas las figuras. He aquí la clave para encajar la geometría con el Arte. Aunque en la demostración que Llull proporciona de la *Figura medii trianguli* el número 9 sea arbitrario y de él se derive el 16, cabe preguntarse: ¿qué número fue primero en su mente? Si primeramente fijó el número 16, tal como nos indica la cronología de sus obras, y luego redujo el número de referencia al 9, habrá que reconocer la sutilidad de la mente de Llull y el dominio que tenía de la geometría heredada de la tradición y transformada por él en una nueva geometría.

¹⁰⁵ La división de figuras geométricas era un ejercicio tanto teórico (geometría especulativa) como práctico, típicamente aplicada en la división de tierras agrícolas. En el tipo práctico cabe recordar los problemas de divisiones de figuras planteados por Herón de Alejandría (s. I a. C.) con soluciones aproximadas, a menudo con números enteros, en comparación a las teóricas y generales planteadas por Euclides; Clare, *Euclid's book on division of figures*, pp. 26-27: «For exemple, II: "To divide a triangle in a given ratio by a line draw parallel to the base [...] numbers although theoretical analysis sometimes enters"».

9. Conclusiones

Ramon Llull, en su segunda estancia parisina de 1297-1299, se enfrentó a un problema que no era nuevo para él. Por un lado, crecía la autonomía de la facultad de filosofía respecto de la de teología y, por otro, la difusión de la postura epistemológica de los aristotélicos estrictos, conocidos como averroístas, planteaba disputas a propósito de las relaciones entre la fe y la razón. Se iba imponiendo un doble orden de conocimiento, la llamada «doble verdad»: el conocimiento teológico y el conocimiento filosófico no necesariamente coincidían. Llull, que proponía su Arte como una ciencia sobre las otras ciencias con una visión unitaria del saber, respondió al desafío de explicitar los principios que la regían utilizando la geometría, una disciplina que captó poderosamente su atención en esta época, una geometría que, obviamente, no podía estar reñida con la teología.

La geometría es una ciencia, religiosamente neutral, que formaba parte del sustrato cultural común de musulmanes, judíos y cristianos, una ciencia demostrativa, con un método deductivo de proposiciones a partir de axiomas. Llull vio en ella una herramienta útil para defender su idea de un saber único, en el que convergen la filosofía y la teología, un saber que permite demostrar la verdad de la fe cristiana en uno de los dogmas más complejos desde un punto de vista apologetico, el dogma de la Trinidad.

Llull ideó un sistema explicativo y demostrativo de la teología cristiana a partir de un modelo geométrico. Esto es lo que propone en *De quadratura et triangulatura circuli sive De principiis theologiae*. La geometría trata de las cosas tangibles, captadas por los sentidos mejor que ninguna otra ciencia, y resulta útil para ejercitar la imaginación de manera que el intelecto avance en el conocimiento de nuevos teoremas y nuevas proposiciones fundamentadas con razones necesarias. Con estos instrumentos Llull defendía la idea de que, por analogía, por equiparación de conceptos y sustancias, por comparación con el mundo creado, se podía llegar a conocer al Creador.

Llull fue innovador al pensar, e intentar demostrarlo, que el mundo físico, tanto el sublunar como las estrellas y los planetas, estaba formado por círculos, triángulos y cuadrados. Es decir, que las formas de los cuerpos están constituidas en su esencia por estas tres figuras, y que todos los procesos de generación y corrupción de los elementos también están relacionados con estas tres figuras geométricas. Si la creación es explicable por círculos, cuadrados y triángulos, por analogía la esencia del Creador, el secreto de Dios, será asumible por el conocimiento humano a partir de relaciones geométricas basadas en esas tres figuras.

Llull se enfrentó a la demostración geométrica más compleja, la cuadratura del círculo, para disponer de un fundamento sólido. A partir de ahí se podían explicar las cosas creadas tanto naturales como artificiales; con este conocimiento geométrico del mundo físico y la ayuda de la imaginación, el intelecto tenía que poder dar el salto de conocer al Dios creador. Para Llull la geometría no era una ciencia especulativa como la presentaba la tradición euclidiana, sino una ciencia práctica. Sin embargo, en el pensamiento de Llull la practicidad y la especulación de la geometría se funden en un solo saber en el que conviven empirismo y deducción. Con la precisión y la universalidad de la geometría, con la imaginación, con el razonamiento riguroso y lógico, la mente humana puede llegar a demostrar las verdades tanto del conocimiento empírico de los sentidos como el espiritual de la fe.

La solución luliana del problema –irresoluble– de la cuadratura por área de un círculo no sigue los métodos tradicionales. Llull aplica el método de su Arte y cree haber dado con un resultado definitivo, no solo para la cuadratura del círculo sino también para la triangulación. Sabemos hoy en día que fue un intento aproximado, pero ello no le resta ningún mérito, ya que se trata de un método original y sencillo de aplicar.

Llull llamó *Figura plena* a la unión de las tres figuras (círculo, cuadrado, y triángulo) iguales y equivalentes a simple vista. Se trata de un círculo, un cuadrado y un triángulo de la misma área y que comparten el centro. En esta figura, que es trinitaria en su esencia, intervienen las tres figuras básicas del esquema luliano de la creación. Se ha querido mostrar en este artículo por qué la *Figura plena* es la representación de la figura del hombre en el aspecto del hilemorfismo, a la vez que da significación del hombre en un plano más trascendente vinculado al Creador. La *Figura plena*, que se ha tomado como un referente iconográfico luliano, es una impresionante alegoría geométrica de las tres personas divinas, distintas e iguales, de la Trinidad.

La *Figura medii trianguli* es el resumen geométrico de las equivalencias entre el número de dignidades, de 16 y de 9, en el círculo que representa a Dios en las sucesivas versiones del Arte. Llull ideó una demostración ternaria de esta figura con la mediación del número 13. Esta demostración justifica la elección de estos números, el 16 y el 9, para construir las dos figuras A del Arte sin recurrir ni a la numerología ni a la cábala. Llull toma el 16 y el 9 de la perfección geométrica de la esencia divina. Un círculo, un triángulo equilátero inscrito y un cuadrado inscrito mantienen una relación geométrica entre los números 9-13-16. Esta relación se articula con la demostración de la cuadratura, para explicar el trinitarismo de Dios, como causa del trinitarismo de la creación. Los mecanismos lógicos del Arte obedecen a la misma génesis

cuantitativa. La nueva geometría luliana expresa icónicamente la unidad de la verdad.

Siempre se podrá objetar que Ramon Llull no hizo ninguna aportación valiosa a la geometría teórica. La objeción, sin embargo, carece de sentido una vez se ha demostrado la maestría práctica de la nueva geometría luliana. La forma de expresar las intuiciones matemáticas y simbólicas de las tres figuras que hemos analizado no siempre resulta suficientemente clara en una primera lectura, porque hace falta una reflexión pormenorizada y respetuosa para vislumbrar la genialidad de la mente que las formuló.

Anexo: figuras



Fig. 1. Ver nota 52.



Fig. 2. Ver nota 83.

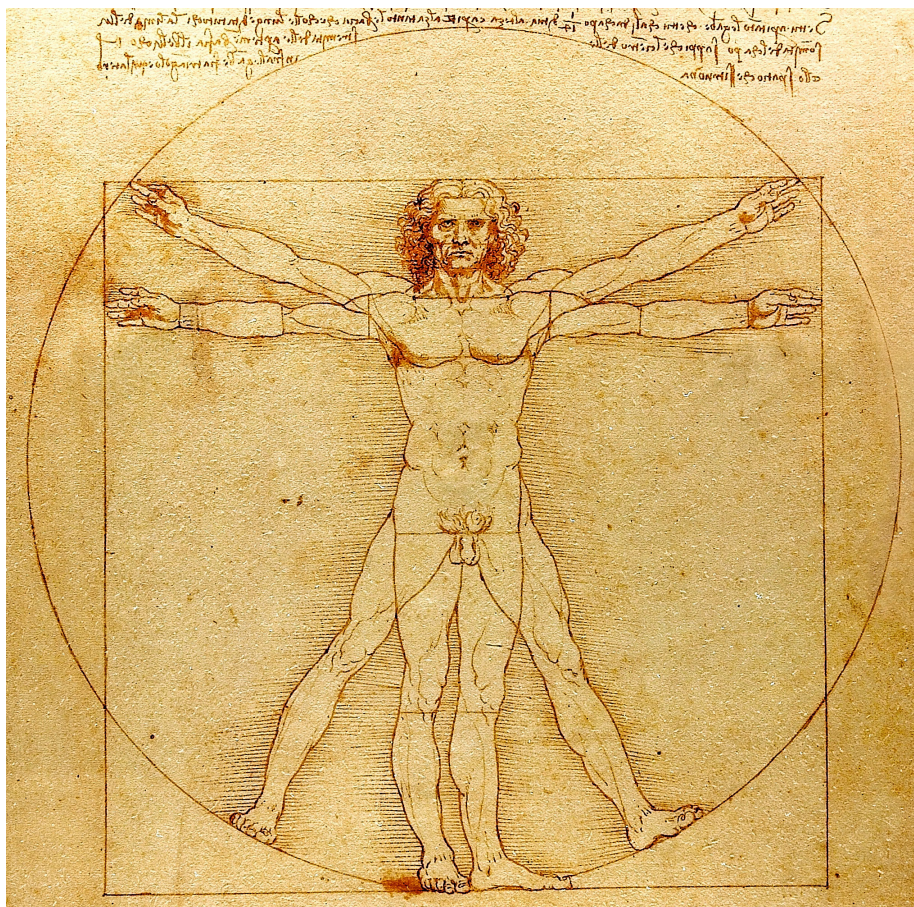


Fig. 3. Hombre de Vitruvio, ver nota 85.

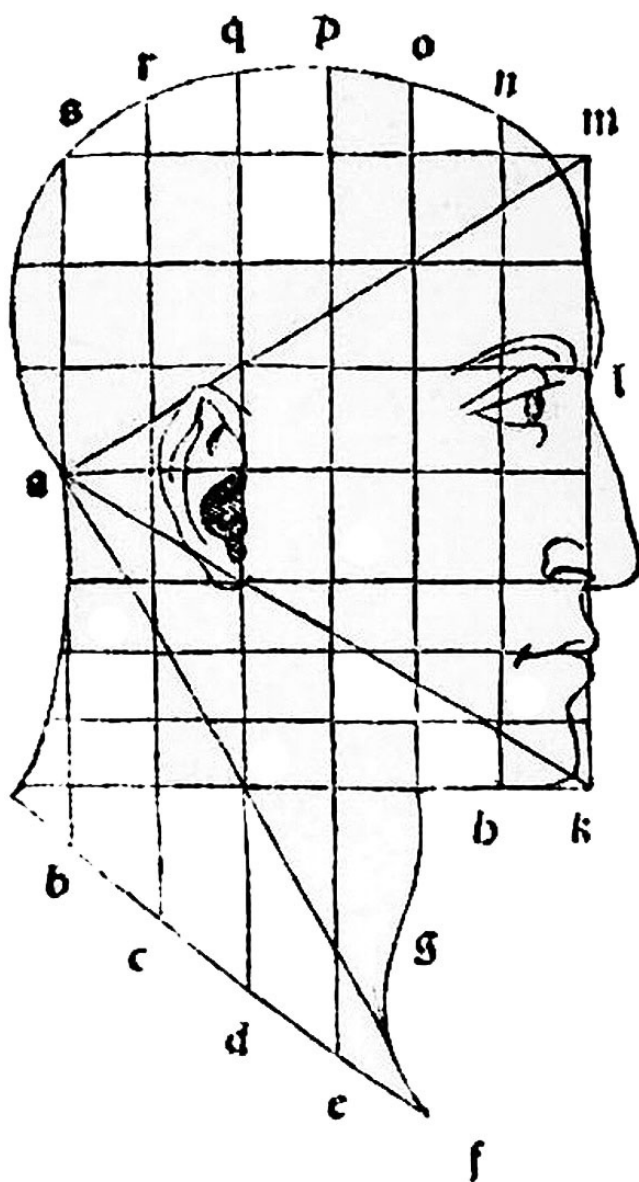


Fig. 4. Proporciones de la cabeza humana, ver nota 88.

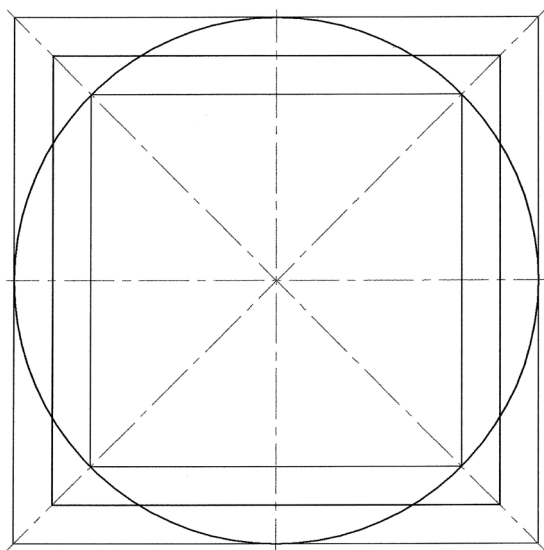


Fig. 5. *Figura magistralis*.

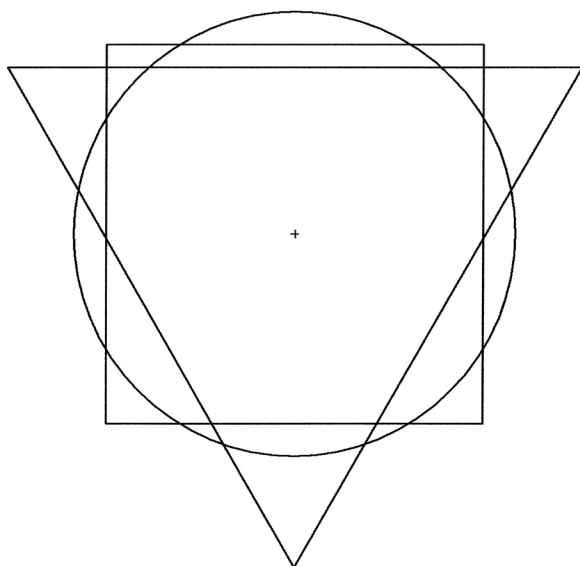


Fig. 6. *Figura plena*.

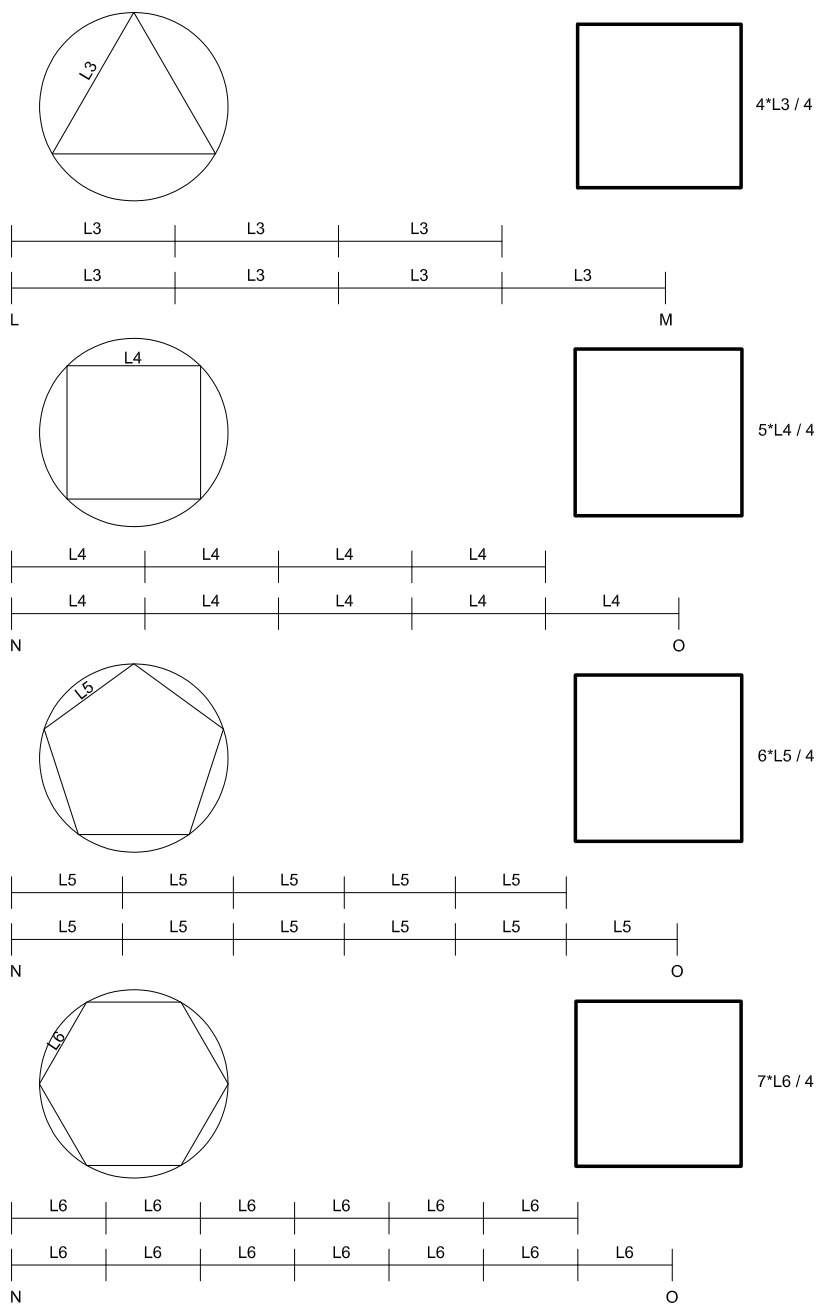


Fig. 7. Cuadratura del círculo.

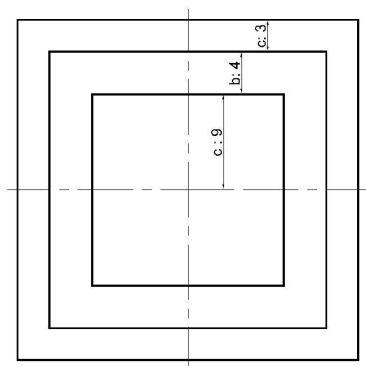


Figura trium quadrangulorum

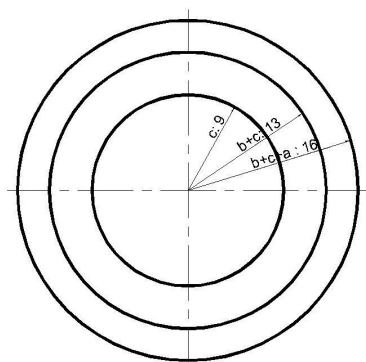


Figura trium circularum

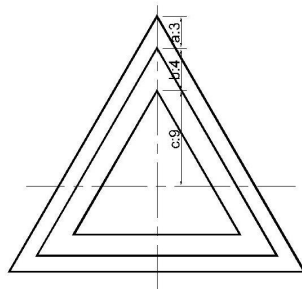


Figura trium triangulorum

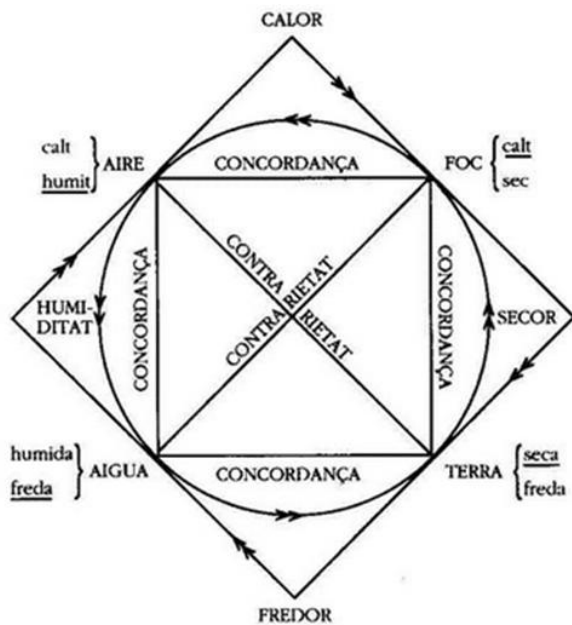


Fig. 9. Quadrat dels elements, ver nota 17.

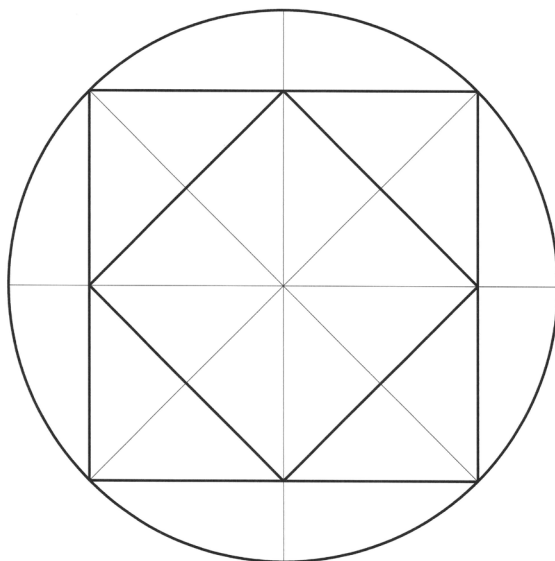


Fig. 10. Figura de gradibus elementorum.

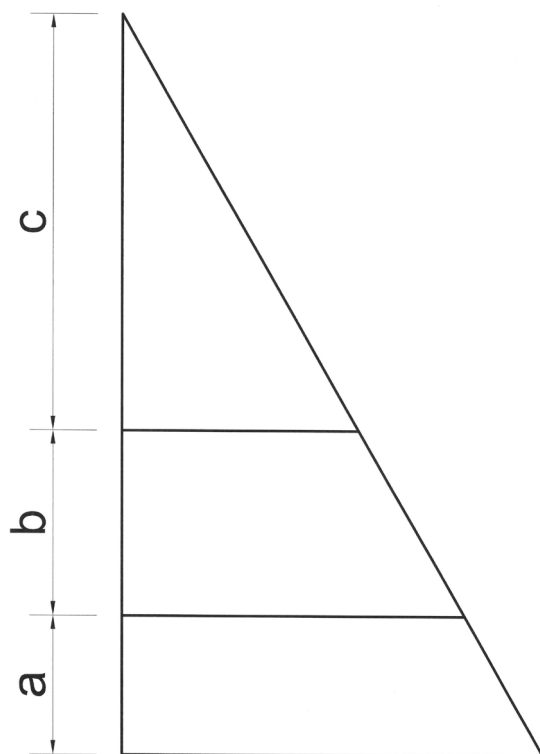


Fig. 11. *Figura medii trianguli.*

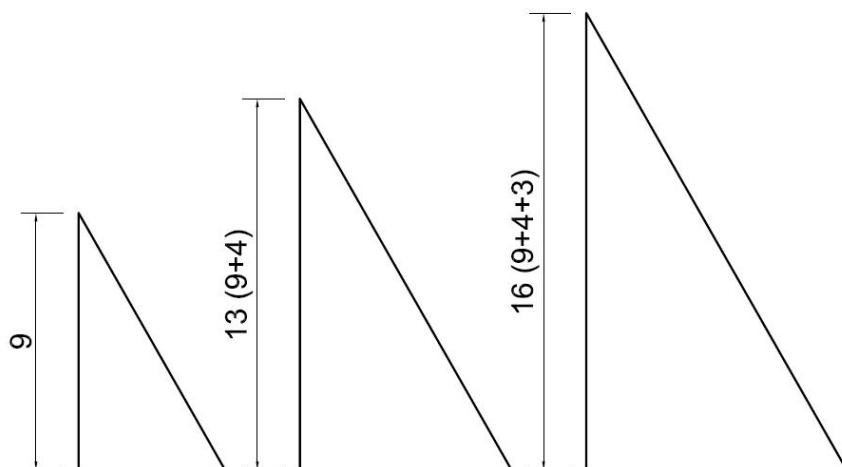
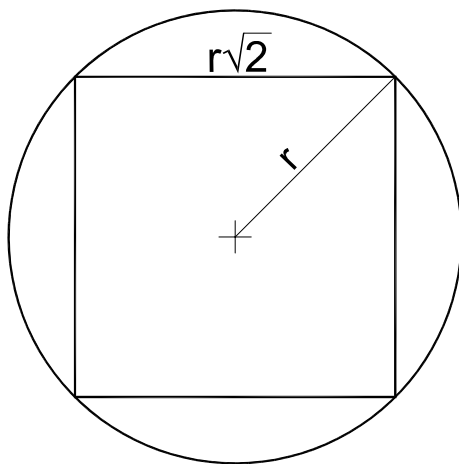
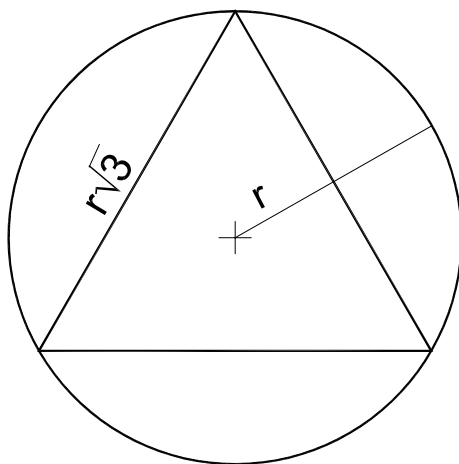


Fig. 12. *Triángulos semejantes de la Figura medii trianguli.*



$$r=9$$

$$13 \approx 9\sqrt{2}$$

$$16 \approx 9\sqrt{3}$$

Fig. 13. Relación de la aproximación numérica 9-13-16 con las figuras del círculo, cuadrado y triángulo inscritos.

